PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1920. Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1920. 21. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. van den Broek, Zur allgemeinen Isotopie. S. 337.

J. Narbutt, Reduzierte Umwandlungs- und Schmelztemperaturen. S. 341.

F. Bartels, Eine Analogie zwischen zweidimensionaler Hydrodynamik und Elektrostatik. S. 349.

W. Filehne, Zu Rayleighs Theorie des sekundären Lichtes. S. 351.

K. Lichtenecker, Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen. Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung des Herrn H. C. Burger. S. 352.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

H. Kienle, Neue Sterne. S. 354.

Berichtigungen. S. 360.

J. E. Lilienfeld u. Franz Rother, Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre. S. 360.

Personalien. S. 360.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur allgemeinen Isotopie [1].

Von A. van den Broek.

Bekanntlich haben Mendelejeff und Meyer beide bei der Aufstellung des periodischen Systems auch versucht die Elemente der VIII. Gruppe mit den Umliegenden als eigene Reihen von je 6 Elementen aufzufassen, die großen Perioden also als aus 3 kleinen von (nach Entdeckung der Edelgase) je 6 Elementen, statt aus 2 von 7 bzw. 11 Elementen bestehend.

Da für die großen Perioden von 18 Elementen je die Atomgewichtsdifferenz annähernd 48 ist, wären diese kleinen Perioden von 6 Elementen je den Atomgewichten nach gleich den beiden „regelmäßigen" von 8 Elementen je am Anfang des Systems.

Nun kennen wir einen einfachen Grund für eine Verkürzung einer Elementenreihe (mit entsprechender Änderung der Atomgewichte), nämlich die Einfügung von Kernelektronen. Wenn in einem vollständig regelmäßigen System von kleinen Perioden von je 8 Elementen und Atomgewichten gleich den doppelten Ordnungszahlen, für jede Periode zwei Kernelektronen eingefügt werden, so kommt regelmäßig eine Atomgewichtsdifferenz 16 auf 6 statt auf 8 Elemente. So wäre dann z. B. von Ca bis Hg für $80 - 20 = 60$ Ordnungszahlen der Atomgewichtsdifferenz $16 \times 60 : 6 = 160$, wie er tatsächlich $(200{,}6 - 40 = 160{,}6)$ ist.

Auch die letzte große Periode von 32 Elementen statt 36 oder 48 ist dann zu erklären durch Extraeinfügung von 4 Kernelektronen, wie wir sie in den radioaktiven Reihen beim Pb teilweise auch kennen.

Nun sind die Zerfallsreihen der Radioelemente natürlich (vom komplexen Zerfall abgesehen) zu gleicher Zeit arithmetische Reihen von Kernteilchen, denn jeder Zerfallsstufe entspricht der Verlust von entweder ein α- oder ein β-Teilchen.

Im allgemeinen, z. B. in der Th-Reihe von ThD bis Th (also in umgekehrter Folge), schließt sich aber die Anordnung nach den Ordnungszahlen dieser Reihe der Kernteilchen genau an, und fällt für die nur durch eine Isotope vertretenen Ordnungszahlen mit dieser zusammen.

Diese „Typischen" weisen also bei einem Unterschied im Atg. von jeweils 8, auch in Kernladung, Ordnungszahl (Z) und Zahl der Kernteilchen (K) wie der peripherischen Elektronen einen solchen von je 3 auf, so daß für die Typischen der ganzen Th-Reihe

$$Z/3 - A/3 = \text{konst.} \quad \text{und} \quad Z - K = \text{konst.}$$

Tabelle I.

Thorium	D	C_2	C_1	B	A	Em	X	Rad	Ms_2	Ms_1	Th
Atg.	208	212	*212*	212	216	**220**	224	228	*228*	229	232
K	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
Thorium	—	D / B	C_1	C_2 / A	—	Em	—	X / Ms_1	Ms_2	Rad / Th	—
Z	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
Atg.	—	208 / 212	*212*	212 / 216	—	**220**	—	224 / 228	*228*	228 / 232	—

[1] Siehe auch diese Zeitschr. 17, 260, 1916.

Tabelle II.

Beispiel eines regelmäßigen Systems aller Isotopen nach der $4\alpha/2\beta$-Hypothese.

K, a, b, h = Zahl der Kern-, α-, β-, H^+-Teilchen; Z = Ordnungszahl, $a' = a - 8$;

	Z	K	h	$a+b$	$a'+b$	a'	a	$4a$	Atg.	b	Isot.
Cu	29	21	1	20	12	8	16	64	65	gerade	frei
Zn	30	22	2	20	12	8	16	64	66	"	"
Ga	31	23	3	20	12	8	16	64	67	"	"
Ge	32	24	1	23	15	10	18	72	73	ungerade	zentral
As	33	25	2	23	15	10	18	72	74	"	"
Se	34	26	3	23	15	10	18	72	75	"	"
Br	35	27	1	26	18	12	20	80	81	gerade	frei

usw.

Die Zahlen der Kernelektronen (b) bilden natürlich ebenso eine kontinuierliche Reihe, wie die der α-Teilchen (a) eine solche von geraden Zahlen, denn für jede weitere Typische ist die Differenz $2\alpha - \beta$.

Natürlich sind von den Atg., wenn eine, dann alle ganzzählig. Nun hat die Proutsche Hypothese vor wenigen Wochen eine plötzliche Bestätigung erfahren durch die Astonschen Versuche mit positiven Strahlen, wobei alle Atom- und Molekulargewichte (in über 40 Fällen) sich als ganzzählig ergaben, ohne irgendwelche Zwischenstufen[1]).

So für *Cl* 2 Isotopen 35 und 37, und für *Ne* 20 und 22, also ungerade Atg. an ungeraden, und gerade an geraden Stellen. Da keine weiteren hier gefunden würden, muß auch, wie meistens schon angenommen, die Zahl (h) der H^+-Teilchen 0, 1, 2 oder 3, aber nicht höher sein, denn sonst wäre z. B. für $h = 4$ eine weitere Isotope $3\alpha + 4H^+$ neben 5α für die Kernladung 10 gefunden. Diese vier Reihen $4n$; $4n+1$; $4n+2$ und $4n+3$ wären schon durch die Atg. der ersten Periode 4, 12; 1, 9; 14; und 7, 11 usw. gegeben, und dürften lückenlos sein.

Die wirklichen Atg. bilden also ebenfalls eine kontinuierliche Reihe. Wäre außerdem für jede die Zahl (oder Zahlen) der Kernelektronen bekannt, so hätten wir das vollständige System der Isotopen.

Denken wir uns nun 1, 2 bzw. 3 H^+-Teil-

Atn.		Atg.	$4n+1$		$4n+2$		$4n+3$		$4n$	
1	*H*	1,008	1		—		3		—	
2	*He*	4,00	—		(2)		(3)		4	
3	*Li*	6,94	5	9	—		3 7		—	
4	*Be*	9,1	9		6		—		8	
5	*B*	11,0	9	13	—		11		—	
6	*C*	12,00	—		10 ?	14	—		12	
7	*N*	14,01	17		14		15		—	
8	*O*	16,00	—		14	18	—		16	
9	*F*	19,1	21		—		19		—	
10	*Ne*	20,2	—		22		—		20	
11	*Na*	23,10	25		—		23		—	
12	*Mg*	24,32	—		26		—		24	
13	*Al*	27,1	29		—		27		—	
14	*Si*	28,3	—		30		—		28	
15	*I*	31,04	33		—		31		—	
16	*S*	32,07	—		34		—		32	
17	*Cl*	35,46	37		—		35		—	
18	*Ar*	39,88	—		38		—		36	40
19	*K*	39,10	41		—		39 ?	43	40	
20	*Ca*	40,07	—		42		43		40	44
21	*Sc*	45 ?	45		—		43 ? 47		—	
22	*Ti*	48,1			46		—		48	
23	*V*	51,0	49		—		51		48	
24	*Cr*	52,0	—		50		—		52	
25	*Mn*	54,9	53	57	—		55		—	
26	*Fe*	55,84	57		54	58	—		56	
27	*Co*	58,97	57	61	58		59		—	
28	*Ni*	58,7			58	62	—		60	64

1) Nature 104, 393.

	II.			$4n+1$			$4n+2$			$4n+3$			$4n$		
	29	*Cu*	63,6		**65**			—			(63)			**64**	
4	30	*Zn*	65,4		—			**66**			—		64		68
	31	*Ga*	69,9	69		73		—			67			—	
	32	*Ge*	72,5		**73**		70		74		—			**72**	
5	33	*As*	74,96	73		77		**74**		71		75		—	
	34	*Se*	79,2		—		74		78		75		76		80
	35	*Br*	79,9		**81**			—		75		79		**80**	
6	36	*Kr*	82,9		—			**82**			—		80		84
	37	*Rb*	85,45	85		89		—			83			—	
	38	*Sr*	87,6		**89**		86		90		—			**88**	
7	39	*Y*	89	89		93		**90**		87		91		—	
	40	*Zr*	90,6		—		90		94		**91**		92		96
	41	*Nb*	93,5		**97**			—		91		95		**96**	
8	42	*Mo*	96,0		—			**98**			—		96		100
	43	—	—	101		105		—			**99**			—	
	44	*Ru*	101,7		**105**		102		106		—			**104**	
9	45	*Rh*	102,9	105		109		**106**		103		107		—	
	46	*Pd*	106,7		—		106		110		**107**		108		112
	47	*Ag*	107,9		**113**			—		107		111		**112**	
10	48	*Cd*	112,4		—			**114**			—		112		116
	49	*In*	114,8	117		121		—			**115**			—	
	50	*Sn*	118,7		**121**		118		122		—			**120**	
11	51	*Sb*	120,2	121		125		**122**		119		123		—	
	52	*Te*	127,5		—		122		126		**123**		124		128
	53	*I*	126,9		**129**			—		123		127		**128**	
12	54	*X*	130,2		—			**130**			—		128		132
	55	*Cs*	132,8	133		137		—			**131**			—	
	56	*Ba*	137,4		**137**		134		138		—			**136**	
13	57	*La*	139,0	137		141		**138**		135		139		—	
	58	*Ce*	140,25		—		138		142		**139**		140		144
	59	*Pr*	140,6		**145**			—		139		143		**144**	
14	60	*Nd*	144,3		—			**146**			—		144		148
	61	—	—	149		153		—			**147**			—	
	62	*Sa*	150,4		**153**		150		154		—			**152**	
15	63	*Eu*	152,0	153		157		**154**		151		155		—	
	64	*Gd*	157,3		—		154		158		**155**		156		160
	65	*Tb*	159,2		**161**			—		155		159		**160**	
16	66	*Ds*	162,5		—			**162**			—		160		164
	67	*Ho*	163,5	165		169		—			**163**			—	
	68	*Er*	167,7		**169**		166		170		—			**168**	
17	69	*Tu*	168,5	169		173		**170**		167		171		—	
	70	*Yb*	172,0		—		170		174		**171**		172		176
	71	*Lu*	174,5		**177**			—		171		175		**176**	
18	72	—	—		—			**178**			—		176		180
	73	*Ta*	181,5	181		185		—			**179**			—	
	74	*W*	184,0		**185**		182		186		—			**184**	
19	75	—	—	185		189		**186**		183		187		—	
	76	*Os*	190,6		—		186		190		**187**		188		192
	77	*Ir*	193,1		**193**			—		187		191		**192**	
20	78	*Pt*	195,2		—			**194**			—		192		196
	79	*Au*	197,2	197		103		—			**195**			—	
	80	*Hg*	200,6		**203**		198		202		—			**200**	
	81—92	*Tl* — *U*						Radioelemente.							

chen mit je 8 α-Teilchen für die beiden ersten Perioden und dann mit je 1 β- und je 2 α-Teilchen für je 3 Ordnungszahlen vereint, also $\beta n\, \alpha\, 2n + 8H + 1$, 2 bzw. 3, dann ist

$$A = 4\ (2n + 8) + 1,\ 2 \text{ bzw. } 3 \text{ und}$$
$$Z = 3n + 16 + 1,\ 2 \text{ bzw. } 3.$$

Ebenso aber können wir von den Radioelementen ausgehen. Denn wie oben erwähnt, kommt für die *Th*-Reihe eine Typische auf je 3 Ordnungszahlen. Denkt man zu jedem je 1, 2 bzw. 3 H-Teilchen hinzu, so bilden die 3 neuen Reihen wieder nach Ordnungszahlen und Zahl der Kernteilchen eine kontinuierliche Reihe, wobei die der *Th*-Reihe mit einer von diesen 3 neuen zusammenfallen muß, und zwar, wenn zu gleicher Zeit ein Kernelektron hinzukommt (natürlich eine willkürliche Annahme), mit der $4n + 1$ Reihe.

Für alle 4 Reihen zusammen würde sich dann die einfache Formel $A = 8/3 Z + h +$ konst.

ergeben, wenn nur für $Z/3$ immer die nächste ganze Zahl gerechnet wird, denn alle wirklichen Atg. müssen ganzzählig sein.

Für die Radioelemente der $4n+2$ Reihe (U-, Ra- und wahrscheinlich Ac-Reihe) gibt diese Formel nicht die bekannten Isotopen; ob für die beiden ungeraden Reihen ist unbekannt. Auch ist bei Pb der Zerfall allgemein komplex und wohl verdoppelt. Denn dem Atg. des Hg 200,6 entspricht eine Typische 200, nicht 204. Von Hg jedoch nach unten bis etwa Ca ergibt sich für $80-20=60$ Ordnungszahlen und $70-10=60$ Kernteilchen ein Atg. Unterschied $200-40=160$ also wieder 8 für je 3 Ordnungszahlen, und wenn nach der Formel konst. $=8/3\,Z+h-A=8/3\times 81-200=16$, so ergibt sich ein vollständiges System der Typischen und dann aller Isotopen in fast vollständiger Anschließung an die experimentellen Atg.

Nur für Ru (101,7 statt 102) und In (114,8 statt 115) ist die Abweichung mehr als eine Dezimale, und da die Atg. immer so angegeben werden, daß die letzten Dezimalen unsicher sind, kommen auch diese beiden Abweichungen nicht in Betracht. Vielleicht ist auch das Atg. des α-Teilchens nicht genau 4,00.

Anmerkung bei der Korrektur. Es wurden hier die β- mit den α-Teilchen vereint und zu diesen die 1, 2, 3 oder 0 H-Teilchen hinzugedacht. Können aber zu diesen H-Kernen auch β-Teilchen hinzukommen, so ist damit die Möglichkeit von nicht weniger als 10 Reihen gegeben je nachdem zu den Teilchen der Th-Reihe H, $H\beta$; H_2, $H_2\beta$, $H_2\beta_2$; H_3, $H_3\beta$, H_3B_2 oder $H_2\beta_3$ hinzukommen. Die erst nach Einsendung dieser Abhandlung durch Aston veröffentlichten Zahlen machen diese Annahme wahrscheinlich. Denn es wurden von Aston, in scharfem Gegensatz zu oben erwähnten 2 Itotopen bei Ne und cl, für Kr und Xe nicht weniger als 6 bzw. 5 (nach dem $4\alpha+2\beta$-System je 8) Isotopen gefunden und zwar fast genau dieselben, wie sie in einer 1916 erschienenen Abhandlung: „Über die Isotopen sämtlicher chemischen Elemente" aus der $4\alpha+2\beta$ Hypothese vorhergesagt wurden durch Fortsetzung der 3 Radioreihen nach unten (diese Zeitschr. 17, 260, 1916).

Aston:	Kr 78, 80, 82, 83, 84, 86;	
	Xe 128, 130, 131, 133, 135.	
van den Broek:	Kr —, 80, 82, 83, 84, 87;	
	Xe 128, 130, 131, 132, 135.	

Diese Übereinstimmung wird vollkommen, wenn nach der jetzt allgemeinen Auffassung die Ac-Reihe als Abzweigung der Ra-Reihe, statt als $4n+3$-Reihe aufgefaßt wird, und neben der $4n+3$ auch eine $4n+1$-Reihe zugefügt. Das kann aber auf mehrere Weise geschehen.

Das ganze System aller Isotopen, d. h. aller wirklichen Elemente mit ganzzähligen Atg. zerfällt also in 3 Teile. Der Anfang ist nur dann aufzustellen, wenn jede Einfügung von Kernelektronen in Paaren stattfindet. Dann muß für $h=1$ diese Einfügung beim Be (Atg. 9 in $Z=4$); für $h=2$ beim N (Atg. 14 in $Z=7$) stattfinden; denn ungerade Atg. für gerade Ordnungszahlen oder umgekehrt können nur zentrale sein. Für $h=0$ ergibt sich die erste Einführung unzweideutig beim K, da sowohl für Ar als für Ca das Atg. fast genau 40 ist. Die bekannte Radioaktivität des K (β-Strahlung) würde also eine einfache Erklärung finden, deutet aber außerdem auf Einfügung von Kernelektronen für $h=3$ hin für K und Ca, während eine zweite Einfügung für $h=3$ schon ganz am Anfang des Systems vorhanden sein muß, da schon beim Li (Atg.) 2 Kernelektronen vorhanden sein müssen. Allerdings wurden die Isotopen des C und O von Aston nicht gefunden.

Zusammenfassung.

Wäre das periodische System ein System von 2 Reihen, z. B. $3+4n$ und $4n$, ohne Kernelektronen, so wäre Atg. $=2Z$ bzw. $2Z+1$ und alle Atg. ganzzählig. Daß sie es nicht sind, wird bedingt erstens durch das Vorhandensein von mindestens 2 weiteren Reihen $1+4n$ und $2+4n$, deren Atome nur seltener sind. Dann durch Einfügung der Kernelektronen, und zwar nach dieser $4\alpha/2\beta$-Hypothese von Cu ab in regelmäßiger Weise. Die sich dabei ergebende Gleichheit in Zahl der weiter hinzukommenden Kernteilchen mit den peripherischen (sei es auch nur für typische Isotopen) wird vielleicht einmal für den Aufbau der Atome im Raume von Bedeutung werden. Wo diese Gleichheit zusammenfällt mit der Durchführung der ursprünglichen kleinen Perioden von 16 Atg.-Einheiten auf jetzt 6 statt 8 Ordnungszahlen, und die Zahl der Isotopen im Durchschnitt gerade verdoppelt wird, wie die Zahl der Kernteilchen, können beide Teile des Systems als gleich regelmäßig betrachtet werden, das erste durch die ungleiche Einfügung der Kernelektronen sogar eigentlich unregelmäßiger. Ob die weitere Reduktion der letzten Perioden erst bei den Radioelementen oder eher zu erstarkter Aufnahme von Kernelektronen führt, d. h. welche Isotopen hier tatsächlich existieren, muß experimentell bestimmt werden. Ebenso der Übergang in der dritten kleinen Periode.

Scheveningen, Februar 1920.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Reduzierte Umwandlungs- und Schmelztemperaturen.

Von J. Narbutt.

Nimmt man an, daß die Entropie S, welche der durch die absolute Temperatur T dividierten Differenz von Gesamtenergie U und freier Energie A gleich ist, bei einem bestimmten Vorgang in kondensierten Einstoffsystemen durch folgende Gleichung

$$S = \frac{U - A}{T} = bT + cT^2 \qquad (1)$$

ausgedrückt wird, in welcher b und c Konstanten sind, dann ist, weil die Entropie der negative Temperaturkoeffizient der freien Energie ist,

$$-\frac{dA}{dT} = bT + cT^2. \qquad (2)$$

Hieraus folgt durch Integration

$$A = -\frac{1}{2}bT^2 - \frac{1}{3}cT^3 + \text{Const.} \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (3) und (1) folgt für $T = 0$,

$$\text{Const.} = A_0 = U_0, \qquad (4)$$

und daher ist

$$A = U_0 - \frac{1}{2}bT^2 - \frac{1}{3}cT^3. \qquad (5)$$

Setzt man nun den Wert für A aus der Gl. (5) in die Gl. (1) ein, so erhält man:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}bT^2 + \frac{2}{3}cT^3. \qquad (6)$$

Für die Differenz der Molekularwärmen folgt aus obiger Gleichung:

$$c_2 - c_1 = \frac{dU}{dT} = bT + 2cT^2. \qquad (7)$$

Die Gleichungen (5) und (6), welche den allbekannten Nernstschen Gleichungen entsprechen, sollen nun ein wenig modifiziert und auf die Umwandlung enantiotroper fester Stoffe bzw. die Erstarrung geschmolzener Substanzen angewendet werden.

Die absolute Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur im Tripelpunkte werde mit Θ und die ihr entsprechende Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme mit U_Θ bezeichnet.

Für die Gleichgewichtstemperatur Θ, bei welcher A gleich null wird, erhält man, wenn die Differenz der Molekularwärmen mit γ bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= U_0 - \frac{1}{2}b\Theta^2 - \frac{1}{3}c\Theta^3, \\ U_\Theta &= U_0 + \frac{1}{2}b\Theta^2 + \frac{2}{3}c\Theta^3, \\ \gamma &= b\Theta + 2c\Theta^2. \end{aligned}\right|$$

Hieraus berechnen sich:

$$U_0 = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6}; \quad b = \frac{2U_\Theta - \gamma\Theta}{\Theta^2}; \quad c = -\frac{U_\Theta - \gamma\Theta}{\Theta^3}. \qquad (8)$$

Für eine beliebige Temperatur T ist nun

$$A_T = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6} - \frac{1}{2}\left(2U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3.$$

Wenn obige Gleichung durch U_Θ dividiert und $\frac{T}{\Theta} = \vartheta$ gesetzt wird, d. h. die Temperaturen in Bruchteilen der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur, welche hier reduzierte Temperaturen genannt werden mögen, ausgedrückt werden, dann bekommt man

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^3. \qquad (9)$$

Ebenso ist

$$U_T = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6} + \frac{1}{2}\left(2U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3$$

und

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^2 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^3. \qquad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) erhält man, wenn

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = 1 \qquad (11)$$

gesetzt wird,

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{2}\left(1 - \vartheta^2\right) \qquad (12)$$

und

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \vartheta^2\right). \qquad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) entsprechen, wie leicht zu finden, den einfachen Nernstschen Gleichungen:

$$A = U_0 - \frac{1}{2}bT^2 \qquad (12a)$$

und

$$U = U_0 + \frac{1}{2}bT^2, \qquad (13a)$$

welche unschwer aus der Annahme

$$S = bT \qquad (14)$$

abzuleiten sind (vgl. die Ableitung der Gleichungen (5) und (6)).

Es mögen nun für eine Reihe gegebener ϑ- und $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte die $\frac{A_T}{U_\Theta}$- und $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte aus den Gleichungen (9) und (10) berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden.

Tabelle I.

$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$	$\vartheta = 0{,}995$		$\vartheta = 0{,}99$		$\vartheta = 0{,}95$	
	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$
2	0,00498	0,990	0,00990	0,980	0,0475	0,905
1	0,00499	0,995	0,00995	0,990	0,0488	0,951
0,5	0,00499	0,998	0,00997	0,995	0,0494	0,975
0,25	0,00500	0,999	0,00999	0,997	0,0497	0,986
0	0,00500	1,000	0,01000	1,000	0,0499	0,998

Diese Tabelle lehrt, daß mit der Abnahme der $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte eine Zunahme der $\frac{A_T}{U_\Theta}$- und $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte verknüpft ist und letztere wächst, wenn ϑ kleiner wird. Es läßt sich nun hieraus schließen, daß die Gleichungen (12) und (13), welche, wie wir gesehen haben, aus den Gleichungen (9) und (10) folgen, wenn $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$ gleich 1 gesetzt wird, bei ϑ-Werten, welche in der Nähe von 1 liegen, noch brauchbare Resultate liefern, sogar wenn die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte enormen Schwankungen von 2 bis 0 unterliegen. (Wasser hat den hohen Wert 1,7 und Helium hat vermutlich einen sehr geringen Wert.) Selbst bei $\vartheta = 0{,}95$, also bei Temperaturen, welche um 5 Proz. niedriger als die Umwandlungs- bzw. Schmelztemperaturen liegen, unterscheidet sich der nach der einfachen Gl. (12) berechnete A-Wert von den nach der Gl. (9) unter Berücksichtigung der verschiedenen $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte berechneten um höchstens $2\frac{1}{2}$ Proz.

Nachdem wir nun gesehen haben, daß die Gl. (12) in einem begrenzten Temperaturintervall der genaueren Gl. (9) wenig nachsteht, wollen wir sie für zwei Substanzen mit den Umwandlungs- bzw. Schmelztemperaturen Θ' und Θ'' für die Temperaturen T' und T'' aufschreiben:

$$\frac{A'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{1}{2}\left[1 - (\vartheta')^2\right] \text{ und } \frac{A''_{T''}}{U''_{\Theta''}} = \frac{1}{2}\left[1 - (\vartheta'')^2\right].$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\vartheta' = \vartheta''$, so folgt:

$$\frac{A'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{A''_{T''}}{U''_{\Theta''}}. \qquad (15)$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll das Verhältnis von Umwandlungs- bzw. Erstarrungsaffinität zur Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme bei der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ für alle Substanzen gleich sein.

Zur Prüfung der obigen Beziehung seien für einige Substanzen bei gleichen ϑ die Affinitäten beim Erstarren ihrer unterkühlten Schmelzflüsse nach der bekannten Gleichung

$$A = RT \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (16)$$

berechnet, und dann die Quotienten aus den berechneten Affinitäten und den Erstarrungswärmen gebildet, welche konstant sein müssen.

Die Berechnung von A nach der Gl. (16) möge für Benzol bei $+ 0{,}2^0$ C angeführt werden. R ist gleich 1,985 cal., T ist gleich $273{,}1^0 + 0{,}2^0 = 273{,}3^0$, p_2 und p_1 (Dampfdrucke des flüssigen und des festen Benzols) sind gleich 26,78 und 24,77 mm. Aus diesen Daten erhält man nach Ersatz von ln durch lg:

$$A = \frac{1{,}985 \times 273{,}3\,(\lg 26{,}78 - \lg 24{,}77)}{0{,}4343} = 42{,}2 \text{ cal.}$$

In dieser Weise sind die A_T-Werte in der folgenden Tabelle berechnet worden. M bedeutet hier und auch weiter stets das Molekulargewicht oder Atomgewicht (bei Elementen).

Der Ausdruck $\frac{A_T}{U_\Theta}$ kann auf Grund der Zahlen der letzten vertikalen Reihe als konstant angesehen werden, wenn man die Größe der Beobachtungsfehler von p_2, p_1 usw. berücksichtigt. Nach der Gl. (12) sollte bei ϑ gleich 0,9813 und 0,9950 $\frac{A_T}{U_\Theta}$ gleich 0,0186 und 0,0050 sein; die Übereinstimmung mit den Mittelwerten ist völlig genügend.

Ferner wollen wir nun die Gl. (13) ebenso wie die Gl. (12) anwenden. Dann erhalten wir für zwei Substanzen:

$$\frac{U'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{U''_{T''}}{U''_{\Theta''}}. \qquad (17)$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll das Verhältnis von Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme zur Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme bei der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ für alle Substanzen gleich sein.

Viel genügendes Material zur Prüfung der Beziehung (17) ist leider nicht vorhanden, und wir müssen uns mit einer Reihe von p-Dihalogen-

Tabelle II.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$T - 273{,}1^0$	p_2 mm	p_1 mm	$\lg p_2 - \lg p_1$	A_T cal	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal	$\frac{A_T}{U_\Theta}$
				$\vartheta = 0{,}9813$				
Benzol	+ 5,4	+ 0,2	26,781)	24,71 1)	0,0338	42,2	30,4 2)	0,0178
Wasser	0	− 5,1	3,134 3)	2,9743)	0,0213	26,1	79,64)	0,0182
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6 5)	+ 58,3	75,46)	66,56)	0,0546	82,7	23,45)	0,0184
							Mittel	0,0181
				$\vartheta = 0{,}9950$				
Benzol	+ 5,4	+ 4,0	33,02	32,32	0,0093	11,8	30,4	0,0050
Wasser	0	− 1,33	4,153	4,102	0,0054	6,7	79,6	0,0047
p-Dichlorbenzol	+ 52,95)	+ 51,3	116,96)	113,26)	0,0139	20,6	29,55)	0,0048
							Mittel	0,0048

benzolen[7]) begnügen. Für diese existieren Messungen der Schmelzwärmen und Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen der festen Substanzen, welche als recht genau gelten können. Die mittleren spezifischen Wärmen der unterkühlten flüssigen *p*-Dihalogenbenzole müssen jedoch nach den Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen der anderen Isomere berechnet werden, weil infolge der geringen Unterkühlungsfähigkeit dieser Substanzen die Bestimmung der spezifischen Wärme für sie in unterkühltem flüssigen Zustand unmöglich war[8]).

Die in der folgenden Tabelle befindlichen $\frac{U_T}{M}$-Werte sind nach der Gleichung

$$\frac{U_T}{M} = \frac{1}{M}\left[U_\Theta - (\Theta - T)(c_2 - c_1)\right] \qquad (18)$$

berechnet worden. Hier bedeutet $c_2 - c_1$ die Differenz der mittleren Molekularwärmen zwischen Θ und T.

Die Konstanz der Zahlen in der letzten vertikalen Reihe ist recht befriedigend.

Tabelle III.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal	$T - 273{,}1^0$	$\frac{c_2 - c_1}{M}$	$\frac{U_T}{M}$ cal	$\frac{U_T}{U_\Theta}$
			$\vartheta = 0{,}98$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	+ 46,4	0,0306	29,30	0,993
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	+ 57,8	0,0250	23,25	0,993
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	+ 79,7	0,0221	20,61	0,992
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	+ 82,8	0,0209	16,42	0,991
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 121,0	0,0112	16,12	0,994
					Mittel	0,993
			$\vartheta = 0{,}90$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	+ 20,3	0,0357	28,34	0,961
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	+ 30,8	0,0290	22,26	0,950
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	+ 50,9	0,0245	19,89	0,958
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	+ 53,8	0,0235	15,72	0,949
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 88,8	0,0142	15,64	0,965
					Mittel	0,956
			$\vartheta = 0{,}70$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	− 44,9	0,0483	24,78	0,840
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	− 37,3	0,0380	19,55	0,835
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	− 21,1	0,0305	17,47	0,841
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	− 18,9	0,0301	13,29	0,802
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 8,4	0,0218	13,58	0,838
					Mittel	0,831

1) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, IV. Aufl., S. 391, 1912.
2) J. Meyer, Zeitschr. f. phys. Chem. **72**, 225, 1910.
3) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, IV. Aufl., S. 359, 1912.
4) A. Leduc, Annales de Physique [9] **5**, 17, 1916.
5) J. Narbutt, Zeitschr. f. Elektrochem. **24**, 339, 1918.
6) A. Speranski, Zeitschr. f. phys. Chem. **51**, 45, 1905.
7) J. Narbutt, l. c.
8) Benutzt wurden die Formeln für *o*- und *m*-Dichlorbenzol, *m*-Chlorbrombenzol, *m*-Dibrombenzol, *o*-Bromjodbenzol und *o*-Dijodbenzol.

Tabelle IV.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$\frac{\gamma}{M}$	$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$	$\frac{0{,}45 \times U_\Theta}{\Theta \times M} - \frac{\gamma}{M}$
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	0,286—0,257 = 0,029	0,32	0,030
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	0,227—0,203 = 0,024	0,35	0,031
p-Dibrombenzol	+ 86,9	0,194—0,173 = 0,021	0,36	0,026
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	0,165—0,145 = 0,020	0,44	0,021
p-Dijodbenzol	+129,0	0,146—0,135 = 0,011	0,27	0,018

Vergleichen wir nun die obigen $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte mit aus der Gl. (13) berechneten; für die reduzierten Temperaturen 0,98; 0,90; 0,70 erhalten wir aus ihr 0,980; 0,905; 0,745 — also eine sehr mangelhafte Übereinstimmung. Das ist auch verständlich, denn die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte für obige p-Dihalogenbenzole weichen sehr stark von 1 ab, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher auch die Differenzen der spezifischen Wärmen $\frac{\gamma}{M}$ bei den Schmelztemperaturen Θ, wie sie sich aus den empirischen Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen ergeben, angeführt sind.

Wir müssen also, um eine bessere Übereinstimmung zu erreichen, die kompliziertere Gl. (10) benutzen. Für zwei Substanzen mit den Schmelztemperaturen Θ' und Θ'' und den Wärmen $U'_{\Theta'}$ und $U''_{\Theta''}$ ist bei den reduzierten Temperaturen ϑ' und ϑ'':

$$\frac{U'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right)\left(\vartheta'\right)^2 - \\ - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right)\left(\vartheta'\right)^3$$

und

$$\frac{U''_{T''}}{U''_{\Theta''}} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right)\left(\vartheta''\right)^2 - \\ - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right)\left(\vartheta''\right)^3.$$

Die Beziehung (17) gilt hier nur in dem Falle, wenn in den beiden obigen Gleichungen

$$\frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}} = \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}} \qquad (19)$$

ist, was für die p-Dihalogenbenzole innerhalb der Fehlergrenzen zutrifft, wovon man sich aus der Tabelle IV überzeugen kann.

Bildet man nun aus den Zahlen in der vorletzten vertikalen Reihe der erwähnten Tabelle das Mittel 0,35 und setzt es in die Gl. (10) ein, so bekommt man eine bedeutend bessere, aber noch nicht befriedigende Übereinstimmung mit den $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werten in der Tabelle III; doch läßt sich jetzt leicht durch Probieren ein völlig genügender Wert 0,45 finden. In der letzten vertikalen Reihe der vorstehenden Tabelle befinden sich die aus $\frac{0{,}45 \times U_\Theta}{\Theta \times M}$ berechneten $\frac{\gamma}{M}$-Werte, und solche Differenzen, wie sie zwischen den auf zweierlei Weise gefundenen $\frac{\gamma}{M}$-Werten zu konstatieren sind, erscheinen hier statthaft.

Durch Einsetzen des Wertes 0,45 in die Gl. (10) erhalten wir:

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}(4 - 0{,}45) + \frac{1}{2}(2 - 0{,}45)\vartheta^2 - \\ - \frac{2}{3}(1 - 0{,}45)\vartheta^3 = 0{,}5917 + 0{,}775\,\vartheta^2 - 0{,}3667\,\vartheta^3. \qquad (20)$$

Hieraus berechnen sich für die reduzierten Temperaturen 0,98; 0,90; 0,70 die $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte 0,991; 0,948; 0,846. Der Anschluß dieser Werte an die aus den Schmelzwärmen und den empirischen Formeln für die spezifischen Wärmen berechneten (s. Tabelle III) ist gut, wenn man bedenkt, daß die vorausgesetzten Unterkühlungen bis zu 120° betragen.

Ferner können wir auch noch für ϑ gleich 0,9813 und 0,9950 aus der nachstehenden Formel

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}(4 - 0{,}45) - \frac{1}{2}(2 - 0{,}45)\vartheta^2 + \\ + \frac{1}{3}(1 - 0{,}45)\vartheta^3 = 0{,}5917 - 0{,}775\,\vartheta^2 + 0{,}1833\,\vartheta^3 \qquad (21)$$

berechnen und die so erhaltenen Werte 0,0187 und 0,0050 mit den Zahlen in der letzten vertikalen Reihe der Tabelle II vergleichen. Hierbei ist wieder eine genügende Übereinstimmung zu konstatieren, obwohl die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte, z. B. für Wasser und p-Dichlorbenzol, sehr stark verschieden sind — es muß eben nur ϑ in der Nähe von 1 liegen.

Die Gl. (9) und (10), welche den Quotienten $\frac{\gamma\Theta}{U_\theta}$ enthalten, sind wohl für ein weites Temperaturintervall richtig und ebenso die aus ihnen folgenden Beziehungen (15) und (17), mit der Einschränkung, daß die letzteren für Substanzen von sehr ähnlicher Konstitution, z. B. für Glieder homologer Reihen, gelten sollen, denn in solchen Fällen wird der obige Quotient wohl von gleicher oder ziemlich gleicher Größe sein, wie wir das auch bei den *p*-Dihalogenbenzolen vorgefunden haben.

Andererseits ist es durchaus möglich, daß völlig unähnliche Stoffe doch sehr nahe gleiche $\frac{\gamma\Theta}{U_\theta}$-Werte besitzen. So läßt sich für die Umwandlung vom monoklinen in den rhombischen Schwefel aus $\frac{U_\theta}{M} = 3{,}19$ cal und $\Theta = 368^0$ nach den Messungen Tammanns[1]) und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}009$, angenähert geschätzt aus den Messungen der mittleren spezifischen Wärmen von Koref[2]) und Wigand[3]),

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\theta} = \frac{0{,}009 \times 368}{3{,}19} = 1{,}04$$

und für das Erstarren von flüssigem $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ aus den Daten von Riesenfeld und Milchsack[4]): $\frac{U_\theta}{M} = 41{,}2$ cal, $\Theta = 389^0$ und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}111$,

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\theta} = \frac{0{,}111 \times 389}{41{,}2} = 1{,}05$$

berechnen. Dagegen ist für letzteren Vorgang für ein anderes Salzhydrat, von allerdings wenig ähnlicher Konstitution, das $Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$, berechnet aus den Daten derselben Autoren für $\frac{U_\theta}{M} = 30{,}2$ cal, $\Theta = 330^0$ und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}127$,

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\theta} = \frac{0{,}127 \times 330}{30{,}2} = 1{,}39.$$

Gelegentlich der Erwähnung der Arbeit von Riesenfeld und Milchsack möchte ich noch auf folgendes hinweisen. Die genannten Autoren finden experimentell für die spezifische Wärme des festen $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ 0,3800 und berechnen 0,3852 nach der Nernstschen Formel

$$\gamma = \frac{U_\theta}{\Theta}. \qquad (22)$$

[Diese folgt aus der Gl. (13), denn differenziert man die letztere nach T, so wird

$$\frac{dU}{dT} = c_2 - c_1 = \frac{U_\theta}{\Theta^2} T,$$

und für die Schmelztemperatur wird

$$c_2 - c_1 = \gamma = \frac{U_\theta}{\Theta}.]$$

Die Übereinstimmung zwischen dem obigen beobachteten und dem berechneten Werte der spezifischen Wärme ist ziemlich gut, dagegen schlecht für die spezifische Wärme des festen $Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$; es wurde experimentell gefunden 0,3733 und berechnet nach der Nernstschen Formel 0,4091. Dieses Auseinandergehen möchten Riesenfeld und Milchsack auf die Ungenauigkeit der Bestimmung der spezifischen Wärme des flüssigen Salzes zurückführen; möglicherweise sind die Messungen aber doch genügend genau, und die spezifische Wärme des festen Salzes berechnet sich nur deshalb zu hoch, weil ja hier der Wert von $\frac{\gamma\Theta}{U_\theta}$ sehr von 1 abweicht (vgl. die frühere Berechnung). Beispielsweise erhält man in einem ähnlichen Falle für die spezifische Wärme von Eis bei 0^0 C aus den Daten: $\frac{\gamma\Theta}{U_\theta} = 1$ (anstatt 1,7), $\Theta = 273^0$, $\frac{U_\theta}{M} = 80$ cal und $\frac{c}{M}$ (flüssig) $= 1$, den Wert 0,7, anstatt 0,5[1]).

Überhaupt wird es nicht oft vorkommen, daß der Quotient $\frac{\gamma\Theta}{U_\theta}$ in der Nähe von 1 liegt, und deshalb wird die Formel $\gamma\Theta = U_\theta$ nicht oft zu guten Resultaten führen. Will man aber die spezifische Wärme eines festen Stoffes aus γ berechnen, wenn obiger Quotient nicht gleich 1 ist, so müssen Θ, U_θ und noch ein U_T-Wert bekannt sein, mit deren Hilfe man dann γ aus nachstehender Gleichung:

$$\gamma = \frac{U_\theta(4 + 6\vartheta^2 - 4\vartheta^3) - 6U_T}{\Theta(1 + 3\vartheta^2 - 4\vartheta^3)}, \qquad (23)$$

welche aus der Gl. (10) folgt, findet.

Mittelst dieser Gleichung erhält man für die Schwefelumwandlung aus den vorhin erwähnten Daten von Tammann für $\frac{U_\theta}{M}$ und Θ und dem von Brönsted[2]) gemessenen Werte $\frac{U_T}{M} = 2{,}40$ cal bei 0^0 C $\left(\vartheta = \frac{273}{368}\right)$:

1) Angeführt nach Nernst, Lehrb. d. theor. Chem. 5. Aufl., S. 631.
2) Ann. d. Phys. **36**, 65, 1911.
3) Ann. d. Phys. **22**, 64, 1907.
4) Zeitschr. f. anorgan. Chem. **85**, 427, 1914.

1) O. Sackur, Lehrb. d. Thermochemie u. Thermodynamik, S. 316, 1912.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. **55**, 371, 1906.

$$\frac{\gamma}{M} = \frac{3{,}19\,(4 + 6\vartheta^2 - 4\vartheta^3) - 6 \times 2{,}40}{368\,(1 + 3\vartheta^2 - 4\vartheta^3)} = 0{,}010,$$

welcher Wert mit dem früher aus den mittleren spezifischen Wärmen angenähert geschätzten 0,009 sehr gut übereinstimmt, wenn man bedenkt, daß z. B. der Wert U_Θ hier wohl nur bis auf einige Prozente sicher bekannt und wahrscheinlich zu hoch ist und ein Prozent Fehler in seiner Bestimmung schon einen Fehler von ca. 5 Proz. des γ-Wertes verursacht.

Andererseits kann U_Θ aus Θ, γ und einem U_T-Werte mittelst folgender Gleichung berechnet werden:

$$U_\Theta = \frac{6U_T + \gamma\Theta(1 + 3\vartheta^2 - 4\vartheta^3)}{4 + 6\vartheta^2 - 4\vartheta^3}. \quad (24)$$

Diese Gleichung gestattet beispielsweise U_Θ für die Umwandlung des weißen Zinns in graues zu berechnen. Nach Brönsted ist bei 0^0 C $U_T = 532$ cal pro Grammatom[1]) und die Differenz der Molekularwärmen ist bei $+10^0$ C gleich 0,5[2]). Ist γ angenähert 0,5, so erhält man für die Umwandlungstemperatur $+18^0$ C ($\vartheta = \frac{273}{291}$):

$$U_\Theta = \frac{6 \times 532 + 0{,}5 \times 291\,(1 + 3\vartheta^2 - 4\vartheta^3)}{4 + 6\vartheta^2 - 4\vartheta^3} = 542 \text{ cal.}$$

Übrigens könnte U_Θ noch berechnet werden aus der Differenz der Molekularwärmen beider Modifikationen bzw. der flüssigen und festen Substanz bei der halben Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur. Wenn man nämlich in der Gl. (7) für b und c ihre Werte aus (8) einsetzt und in der so modifizierten Gleichung einige Umformungen vornimmt, so erhält man:

$$c_2 - c_1 = \left[2(1 - \vartheta) - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}(1 - 2\vartheta)\right]\frac{\vartheta U_\Theta}{\Theta}. \quad (23a)$$

Bei $\vartheta = 0{,}5$ verwandelt sich obige Gleichung in

$$c_2 - c_1 = \frac{U_\Theta}{2\Theta}, \quad (23b)$$

und hieraus bekommt man

$$U_\Theta = 2\Theta(c_2 - c_1). \quad (24a)$$

Die Formel (24a) ist aber leider von geringer praktischer Bedeutung, weil $c_2 - c_1$ selten experimentell bestimmbar ist und noch seltener genügend genau gemessen werden kann[3]). Z. B. berechnet sich $\frac{U_\Theta}{M}$ für die oben besprochene Schwefelumwandlung aus den Messungen der spez. Wärmen von Nernst[1]) zu $2 \times 368 \times 0{,}0053 = 3{,}9$ cal (anstatt 3,19 cal). Die Differenz beträgt also ca. 22 Proz.; doch ist die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Rechnung nur scheinbar unbefriedigend, weil eine solche Differenz in der Umwandlungswärme schon durch eine Unsicherheit von weniger als 1 Proz. in den Daten für die spezifischen Wärmen verursacht wird.

Besser sieht die Übereinstimmung aus, wenn man umgekehrt aus der Umwandlungswärme und der Umwandlungstemperatur $c_2 - c_1$ berechnet. Für die Differenz der spezifischen Wärmen der beiden Schwefelmodifikationen bei 184^0 abs. bekommt man:

$$\frac{c_2 - c_1}{M} = \frac{3{,}19}{2 \times 368} = 0{,}0043.$$

Dieser Wert deckt sich gut mit dem aus den experimentellen Daten für die spezifischen Wärmen von Nernst (l. c.) für dieselbe Temperatur berechneten Werte 0,0053.

Auch findet man für Betol aus $\frac{U_\Theta}{M} = 18{,}0$ cal[2]) für 183^0 abs. den Wert 0,025 und für Benzophenon aus $\frac{U_\Theta}{M} = 23{,}4$ cal[1]) für 161^0 abs. den Wert 0,36, welche sich den von Koref[3]) experimentell gefundenen befriedigend anschließen.

Mit Hilfe der Gleichungen (23a) und (23b) lassen sich ferner die spezifischen Wärmen berechnen. Z. B. sollte für unterkühltes Wasser bei 137^0 abs. aus der spezifischen Wärme von Eis[4]), welche bei derselben Temperatur gleich 0,26 ist, $\frac{c_2}{M}$ ungefähr gleich 0,4 sein.

Schließlich folgt noch aus der Gl. (23a), daß bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt $c_2 - c_1 < 0$ wird, wenn für eine Substanz $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} > 2$ ist; dieses bedeutet so viel, daß die Molekularwärme der stabilen Modifikation bzw. der festen

$$U_\Theta = \Theta(c_2 - c_1) \cdot \frac{n^{\frac{m}{n-m}}}{m^{\frac{n}{n-m}}}$$

existieren muß und zwar bei $\vartheta = \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}$.

1) Entnommen der Arbeit von E. Cohen und W. D. Heldermann, Zeitschr. f. phys. Chem. **89**, 728, 1915.
2) Zeitschr. f. Elektrochem. **18**, 716, 1912.
3) Es sei noch darauf hingewiesen, daß, wenn ganz allgemein

$$S = b\,T^m + c\,T^n$$

ist, wo m und $n > 0$ und $m < n$ ist, die Beziehung

1) Ann. d. Phys. **36**, 414, 1911.
2) G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen (Leipzig 1903), S. 45.
3) Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. (1910), 261.
4) W. Nernst, Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. (1910), 274.

Substanz größer als die der instabilen Modifikation bzw. der flüssigen Substanz wird.

Nun wollen wir zur Beziehung (15) zurückkehren und in ihr U_θ durch den Quotienten aus der Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ, welcher gleich der Entropie S_θ ist, ersetzen; dann erhalten wir:

$$\frac{A'_{T'}}{\Theta' S'_{\theta'}} = \frac{A''_{T''}}{\Theta'' S''_{\theta''}}$$

und bei gleichen S_θ-Werten:

$$\frac{A'_{T'}}{\Theta'} = \frac{A''_{T''}}{\Theta''}. \qquad (25)$$

Der Quotient aus der Umwandlungs-, bzw. Erstarrungsaffinität und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen S_θ-Werten gleich sein.

Ebenso erhalten wir aus der Beziehung (17):

$$\frac{U'_{T'}}{\Theta'} = \frac{U''_{T''}}{\Theta''}. \qquad (26)$$

Der Quotient aus der Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen Werten der Entropie S_θ gleich sein.

Natürlich gelten die Beziehungen (25) und (26) nur dann allgemein, wenn $1 - \vartheta$ gering ist; sie sollen aber in einem weiten Temperaturintervall gelten, wenn die zu vergleichenden Stoffe von sehr ähnlicher Konstitution sind.

Die Richtigkeit der Beziehung (26) möge für $\vartheta = 0{,}90$ an einigen der schon früher erwähnten p-Dihalogenbenzole mit fast völlig gleichen S_θ-Werten in der Tabelle V gezeigt werden.

Tabelle V.

	S_θ	$T-273{,}1^0$	$\frac{U_T}{M}$ cal	$\frac{U_T}{\Theta}$
p-Dichlorbenzol	13,30	+ 20,3	28,34	12,8
p-Chlorbrombenzol	13,27	+ 30,8	22,20	12,6
p-Dijodbenzol	13,30	+ 88,8	15,64	12,8

Wir haben früher gesehen, daß die Umwandlungs- bzw. Erstarrungsaffinität nach der Gl. (16) oder der Gl. (12) berechnet werden kann; in beiden Fällen resultiert fast derselbe Wert, wenn die Differenz $1 - \vartheta$ genügend klein ist. Daher kann man setzen:

$$RT \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{U_\theta}{2}(1 - \vartheta^2),$$

und hieraus folgt:

$$U_\theta = \frac{2RT}{1 - \vartheta^2} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

oder

$$U_\theta = \frac{2R\Theta\vartheta}{1 - \vartheta^2} \ln \frac{p_2}{p_1}. \qquad (27)$$

Die Erstarrungs- bzw. Umwandlungswärme läßt sich aus den Dampfdrucken der unterkühlten flüssigen und festen Substanz bzw. der labilen und stabilen Modifikation berechnen.

Bei genügend genauen Beobachtungen von p kann U_θ ziemlich richtig aus der Gl. (27) erhalten werden, und diese indirekte Bestimmungsmethode dürfte manchmal in Fällen, in denen direkte Messungen von U nicht möglich sind, ziemlich gute Resultate ergeben, wie die nachstehende Tabelle, in welcher die Erstarrungswärmen für einige Substanzen, nach der Gl. (27) berechnet, angeführt und mit den kalorimetrischen Werten verglichen sind, zeigt.

Tabelle VI.

	$\Theta-273{,}1^0$	$T-273{,}1^0$	p_2 mm	p_1 mm	$\frac{U_\theta}{M}$ cal ber.	$\frac{U_\theta}{M}$ cal beob.	Diff. Proz.
Wasser	0	− 1	4,255[1]	4,215[1]	77,6	79,6[2]	−3
Benzol	+ 5,4	+ 4	73,02[3]	32,3[23]	30,1	30,4[4]	−1
p-Chlorbrombenzol	+64,6	+58,3	75,4[5]	66,5[5]	23,4	23,4[6]	0
p-Dichlorbenzol	+52,9	+51,3	116,9[5]	113,2[5]	28,7	29,5[6]	−3

1) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV. Aufl., S. 359, 1912.
2) A. Leduc, l. c.
3) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV. Aufl., S. 391, 1912.
4) J. Meyer, l. c.
5) A. Speranski, l. c.
6) J. Narbutt, l. c.

Noch etwas bessere Resultate gibt natürlich die genauere Gleichung:

$$U_\theta = \Theta\left[\frac{6R\vartheta \ln \frac{p_2}{p_1} + \gamma(1 - 3\vartheta^2 + 2\vartheta^3)}{4 - 6\vartheta^2 + 2\vartheta^3}\right], \qquad (27a)$$

Tabelle VII.

	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.
Benzol[1]	+4	1,0025	+3	1,0047	+2	1,0070[2]	+1	1,0079	0	1,0096
Wasser[1]	−1,37	1,0024	−2,36	1,0042	−3,34	1,0061	−4,32	1,0079	−5,30	1,0098

welche durch Gleichsetzung der Ausdrücke für A (16) und (9) und einige Umformungen erhalten werden kann. Z. B. berechnet sich nach der Gl. (27a) aus obigen Daten für Wasser U_Θ gleich 77,8 cal und aus den Dampfdruckmessungen bei -4^0 U_Θ gleich 78,3 cal. Doch wird in den allermeisten Fällen die Ungenauigkeit der Dampfdruckbeobachtungen den Vorteil der Anwendung der genaueren Gleichung, welche außerdem die Kenntnis von γ verlangt, illusorisch machen.

Durch Einsetzen von S_Θ an Stelle von $\frac{U_\Theta}{\Theta}$ in die Gl. (27) erhält man nach einigen Umformungen für zwei Substanzen:

$$\ln\frac{p_2'}{p_1'} = \frac{S'_\Theta}{2R}\left[\frac{1}{\vartheta'} - \vartheta'\right]$$

und

$$\ln\frac{p_2''}{p_1''} = \frac{S''_\Theta}{2R}\left[\frac{1}{\vartheta''} - \vartheta''\right].$$

Wird in den beiden Gleichungen $\vartheta' = \vartheta''$ gesetzt und die erste Gleichung durch die zweite dividiert, so folgt

$$\ln\frac{p_2'}{p_1'} : \ln\frac{p_2''}{p_1''} = \frac{S'_\Theta}{S''_\Theta}$$

oder

$$\sqrt[S'_\Theta]{\frac{p_2'}{p_1'}} = \sqrt[S''_\Theta]{\frac{p_2''}{p_1''}}. \qquad (28)$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll die Wurzel, deren Exponent der Entropiebeider Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ gleich ist, aus dem Quotienten der Dampfdrucke der labilen und der stabilen Modifikation bzw. der unterkühlten flüssigen und der festen Substanz für alle Substanzen gleich sein.

Die Konstanz des Ausdrucks (28) kann für eine Anzahl gleicher reduzierter Temperaturen an Wasser und Benzol, für welche recht genaue Dampfdruckmessungen existieren, in vorstehender Tabelle gezeigt werden. Für Wasser ist $S_\Theta = 5{,}25$ und für Benzol ist $S_\Theta = 8{,}51$.

Setzt man ferner in der Gl. (28) $S'_\Theta = S''_\Theta$, dann wird

$$\frac{p'_2}{p'_1} = \frac{p''_2}{p''_1}. \qquad (29)$$

Das Verhältnis der Dampfdrucke der unterkühlten flüssigen und festen Substanz bzw. der labilen und stabilen Modifikation soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen S_Θ gleich sein.

Daten zur Prüfung der Beziehung (29) sind wohl nur für p-Dichlorbenzol und für p-Chlorbrombenzol, deren S_Θ-Werte 13,30 und 13,27 betragen, vorhanden[1]).

Für die reduzierte Temperatur 0,9950 ist für p-Dichlorbenzol

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{116{,}9}{113{,}2} = 1{,}033$$

und für p-Chlorbrombenzol (die folgenden p-Werte sind von mir interpoliert worden) ist

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{96{,}5}{92{,}5} = 1{,}043.$$

Diese Übereinstimmung genügt, denn sie entspricht der Genauigkeit der Dampfdruckmessungen.

Endlich möge noch auf eine Gleichung:

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{U_\Theta}{3R\Theta}\left(\frac{2}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right) - \frac{\gamma}{6R}\left(\frac{1}{\vartheta} - 3\vartheta + 2\vartheta^2\right), \qquad (30)$$

hingewiesen werden, welche aus der Gl. (27a) folgt und $\ln\frac{p_2}{p_1}$ aus Θ, U_Θ und γ zu berechnen gestattet. Hiernach läßt sich die Dampfdruckkurve einer unterkühlten flüssigen Substanz finden, wenn die Dampfdruckkurve für die feste Substanz bekannt ist, oder umgekehrt.

Die folgende Gl. (30a) stellt die Gl. (30) in etwas modifizierter Form vor und dürfte für ein ziemlich weites Temperaturintervall gültig sein:

$$\lg p_2 = \lg p_1 + \frac{0{,}4343}{6R}\left[\frac{2U_\Theta}{\Theta}\left(\frac{2}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right) - \gamma\left(\frac{1}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right)\right]. \qquad (30a)$$

1) Die Dampfdrucke sind Landolt-Börnsteins Tabellen (l. c.) entnommen.

2) Dieser Wert weicht erheblich von dem für Wasser ab und paßt sich auch den anderen für Benzol nicht gut an. Das liegt vermutlich daran, daß die zur Berechnung der Konstanten benutzten Dampfdruckwerte des Benzols in diesem Falle nicht richtig sind, wenigstens fügt sich der p-Wert für flüssiges Benzol schlecht in die p, T-Kurve ein.

1) Die p-Werte sind der Arbeit von A. Speranski (l. c.) entnommen.

Leider fehlen fast völlig genaue Dampfdruckmessungen an festen und unterkühlten flüssigen Substanzen in gleichen und genügend weiten Temperaturgrenzen, um die Gleichung exakt prüfen zu können. Wir müssen uns daher damit begnügen, die Dampfdrucke von flüssigem Wasser unterhalb 0° aus den Dampfdruckmessungen für Eis von Scheel und Heuse für einige Temperaturen nach der Gl. (30a) zu berechnen und sie mit den Beobachtungen derselben Autoren an unterkühlten Wasser zu vergleichen[1]). Für Wasser ist $U_\theta = 79{,}6 \times 18{,}016$ cal, $\theta = 273{,}1^0$ und $\gamma = 0{,}5 \times 18{,}016$.

Tabelle VIII.

$T - 273{,}1^0$	p_1 mm	p_2 mm ber.	p_2 mm beob.	Diff. in mm
— 3°	3,566	3,671	3,669	+0,002
— 6	2,762	2,928	2,928	0,000
— 9	2,127	2,322	2,321	+0,001
— 10	1,947	2,146	2,144	+0,002
— 11	1,780	1,981	1,979	+0,002
— 12	1,627	1,829	1,826	+0,003
— 13	1,486	1,687	1,684	+0,003
— 15	1,237	1,432	1,429	+0,003

Die Übereinstimmung ist gut, doch sind die mittelst der Gl. (30a) berechneten Werte durchschnittlich um ein paar tausendstel Millimeter größer als die beobachteten.

Ferner läßt sich aus der obigen Tabelle leicht finden, daß die Differenzen der aus der Gl. (30a) berechneten Zahlenwerte für p_2 und der beobachteten für p_1 zwischen -11^0 und -12^0 ein Maximum aufweisen dessen Existenz schon von Thiesen[2]) vorausberechnet und von Scheel und Heuse[3]) experimentell gefunden worden ist.

Endlich wollen wir noch für drei Temperaturen, bei welchen Wasser in unterkühltem Zustande nicht mehr beobachtet werden konnte und von welchen zwei schon sehr tief liegen, $\frac{p_2}{p_1}$-Werte, berechnet aus auf rechnerischem Wege von Cederberg[4]) und von Nernst[5]) gefundenen Daten und ermittelt aus der Gl. (30), in folgender Tabelle zusammenstellen.

Die Übereinstimmung ist bis zu 209° abs. herab, bei welcher Temperatur nach den Rechnungen von Cederberg (l. c.) und Nernst (l. c.) der Dampfdruck des Eises ca. 1 Tausendstel und der Dampfdruck des unterkühlten Wassers ca.

Tabelle IX.

T^0	$\frac{p_2}{p_1}$ (C.)	$\frac{p_2}{p_1}$ (N.)	$\frac{p_2}{p_1}$ (Gl. 30)
253,09	1,222	1,221	1,217
200,00	2,53	2,07	2, 4
100,00	27	9	12

2—3 Tausendstel Millimeter beträgt, befriedigend, und auch noch bei 190° abs., bei welcher Temperatur der Dampfdruck des unterkühlten Wassers etwa 1 Tausendbillionstel Millimeter betragen soll, stimmen die $\frac{p_2}{p_1}$-Werte nach der Größenordnung überein, wobei der aus der Gl. (30) berechnete Wert sich mehr an den aus den Daten von Nernst ermittelten anlehnt. Es ist daher wahrscheinlich, daß die Gl. (30a) auch in manchen anderen Fällen, wenn sichere experimentelle Daten vorliegen, brauchbare Resultate liefern wird.

Hiermit seien nun meine Ausführungen, welche als vorläufige Mitteilung aufzufassen sind, beschlossen. Arbeiten anderer Autoren konnten von mir leider nicht genügend berücksichtigt werden, weil solche infolge des fast völligen Fehlens der einschlägigen Literatur, besonders aus den letzten Jahren, hier am Orte mir nicht zugänglich waren. Die Veröffentlichung wollte ich aber nicht aufschieben, da ich leider einige Zeit am wissenschaftlichen Arbeiten verhindert sein werde.

Dorpat, im August 1919.

(Eingegangen 20. September 1919.)

1) Die Dampfdrucke für Eis und unterkühltes Wasser sind Landolt-Börnsteins Tabellen (l. c.) entnommen.
2) Ann. d. Phys. u. Chem. **67**, 690, 1899.
3) Ann. d. Phys. **29**, 723, 1909.
4) Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten usw. Berlin 1916, S. 33 u. 36.
5) Entnommen der Arbeit von J. W. Cederberg, l. c.

Eine Analogie zwischen zweidimensionaler Hydrodynamik und Elektrostatik.

Von Fritz Bartels.

Das zweidimensionale Feld sei gegeben durch die analytische Funktion

$$\psi(z) = \varphi + i \cdot \chi,$$

die erfüllt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Die Richtung s (Cosinus: α, β) gibt also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \beta = \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot (-\beta) + \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot \alpha$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

wo s und t zwei aufeinander senkrechte Richtungen sind; s liegt zu t wie x zu y.

In der Hydrodynamik setzt man φ gleich

dem Geschwindigkeitspotential (also $\chi = \text{konst.}$ = Stromlinien) und hat dann für den hydrodynamischen Druck p in einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ϱ ohne äußere Kräfte

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2} v^2 = p_0 - \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = \left| = p_0 - \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)^2 . \right| \quad (1)$$

Hierin ist p_0 der Ruhedruck, v die Geschwindigkeit, s die Richtung einer Stromlinie, speziell also einer Kontur, n deren Normale. In der Aerodynamik verwendet man dies zur Berechnung des Auftriebs von Zylinderflächen in bewegter Luft.

$w(z)$ gibt uns zugleich ein elektrostatisches Feld, wenn wir χ als Potential ansetzen; also $\chi = \text{konst.}$ sind die Potentiallinien, darunter im besonderen die Konturen unserer Leiter. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ erfüllt also (σ = Flächendichte, ε = Dielektrizitätskonstante, n = äußere Normale):

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial \chi}{\partial l}, \quad 4\pi\sigma = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}_n .$$

Die mechanischen Kräfte, ausgeübt auf Leiter, ergeben sich in bekannter Weise aus dem elektrischen Druck p pro cm² parallel n:

$$p = \frac{\sigma}{2} \cdot \mathfrak{E}_n = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)^2 . \quad (2)$$

Ein Vergleich von (1) und (2) zeigt also: elektrische und hydrodynamische Kräfte sind identisch, wenn die Dichte der strömenden Flüssigkeit $\varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi}$, und der Ruhedruck $p_0 = 0$.

Setzt man dies also in die Formeln der vorliegenden aerodynamischen Probleme ein, so sind auch die Kräfte und Momente des entsprechenden Influenzproblems gefunden. Blasius hat 1910 die Berechnung im Falle der Aerodynamik auf einfache komplexe Integrale zurückgeführt (vgl. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, 1917). Genau analog können wir hier vorgehen.

Definition: $$\mathsf{E} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} . \quad (3)$$

Also:

$$\mathsf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} ,$$

$$\mathsf{E} = \mathfrak{E}_y + i \cdot \mathfrak{E}_x .$$

n sei stets die äußere Normale, s die Bogenlänge der Kontur (positiv im Gegenzeigersinn). Wegen

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds}$$

folgt für die Kraftkomponenten auf ein Oberflächenelement (Länge $= ds$, Tiefe $= 1$ cm):

$$d\mathfrak{K}_x = p \cdot ds \cdot n_x = p \cdot dy = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 \cdot dy ,$$

$$d\mathfrak{K}_y = p \cdot ds \cdot n_y = -p \cdot dx = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 \cdot dx .$$

Definition: $$\mathsf{K} = \mathfrak{K}_y + i\mathfrak{K}_x .$$

Also:

$$d\mathsf{K} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2) \cdot (-dx + i \cdot dy) ,$$

$$d\mathsf{K} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathsf{E} \cdot (\mathfrak{E}_y - i\mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy) .$$

Am Leiter ist:

$$\mathfrak{E}_x \cdot dx + \mathfrak{E}_y \cdot dy = 0 .$$

$$(\mathfrak{E}_y - i \cdot \mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy) = -(\mathfrak{E}_y + i \cdot \mathfrak{E}_x)(-dx - i \cdot dy) = -\mathsf{E} \cdot dz ,$$

$$d\mathsf{K} = -\frac{\varepsilon \cdot \mathsf{E}^2}{8\pi} \cdot dz .$$

Für ein endliches Stück also (positiver Sinn!):

$$\mathfrak{K}_y + i\mathfrak{K}_x = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \cdot dz . \quad (4)$$

Drehmoment $d\mathfrak{M}$ um den Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ auf das Element ds:

$$d\mathfrak{M} = (x - x_0) \cdot d\mathfrak{K}_y - (y - y_0) \cdot d\mathfrak{K}_x ,$$

$$d\mathfrak{M} = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}_n^2}{8\pi} \left| (x - x_0) \cdot dx + (y - y_0) \cdot dy \right| .$$

Aber:

$$(\mathfrak{E}_y - i\mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy) = -\mathsf{E} \cdot dz ,$$

$$(\mathfrak{E}_y + i\mathfrak{E}_x) \cdot [(x - x_0) + i(y - y_0)] = \mathsf{E} \cdot (z - z_0) .$$

Durch Multiplizieren:

$$(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_x^2) \cdot [-[(x - x_0)\,dx + (y - y_0) \cdot dy] + i \cdot [(x - x_0) \cdot dy - (y - y_0) \cdot dx]] = -\mathsf{E}^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz .$$

Wir sehen also: $d\mathfrak{M}$ ist Realteil von

$$d\mathsf{M} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathsf{E}^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz .$$

Für ein endliches Stück: $\mathfrak{M} =$ Realteil von:

$$\mathsf{M} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz . \quad (5)$$

Die Elektrizitätsmenge auf dem Element folgt, wie bekannt, zu

$$dE = \sigma \cdot ds = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \chi}{\partial n} \cdot ds = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot d\varphi , \quad E = \frac{\varepsilon}{4\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) ,$$

oder da χ längs der Kontur konstant ist:

$$E = \frac{\varepsilon}{4\pi} (\psi_2 - \psi_1) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \int_1^2 \mathsf{E} \cdot dz . \quad (6)$$

Die Ladung entspricht also dem Produkt: Dichte mal Zirkulation. (3) liefert durch eine komplexe Differentiation die Feldstärke; (4) und (5)

durch je eine komplexe Integration die Kräfte und Drehmomente auf beliebige Teile der Leiter. Die beiden letzten Formeln sind der Beziehung (6) ganz analog. Sie sind nach Cauchy vom Integrationswege unabhängig, sofern er durch stetige Deformation aus der Kontur 1 .. 2 erhalten werden kann ohne Überschreiten eines anderen Leiterstückes.

Besonders einfach werden die Formeln, wenn man sie anwendet auf eine von mehreren geschlossenen Flächen. Man hat dann nur E^2 bzw. $E^2(z-z_0)$ bzw. E in eine Laurent-Reihe zu entwickeln mit den Residuen R_k, R_m, R_e und hat dann nach dem Residuensatz:

$$K = -\frac{\varepsilon i}{4} R_k, \quad M = -\frac{\varepsilon \cdot i}{4} \cdot R_m, \quad E = -\frac{\varepsilon \cdot i}{2} \cdot R_e.$$

Haben wir z. B. im Endlichen eine Konfiguration von Leitern und im Unendlichen ein homogenes $\mathfrak{E}$-Feld, so ist:

$$E = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots.$$

Also die Gesamtmenge: $E = -\frac{\varepsilon i}{2} A_1$ (entsprechend der Zirkulation der Aerodynamik). Eine reelle Menge E verlangt also, daß A_1 rein imaginär ist. Weiter:

$$E^2 = A_0^2 + \frac{2 A_0 A_1}{z} + \frac{1}{z^2}\left| A_1^2 + 2 A_0 A_2 \right| + \ldots,$$

$$K = -\frac{\varepsilon \cdot i}{2} A_0 A_1,$$

oder

$$K = A_0 \cdot E.$$

$$\mathfrak{K}_y + i\mathfrak{K}_x = (\mathfrak{E}_y + i\mathfrak{E}_x)_\infty \cdot E.$$

wie zu erwarten war trotz der Felddeformation am Leiter (Analogon zu der Kutta-Joukowskyschen Auftriebsformel 1910). Drehmoment um den Nullpunkt:

$$M = -\frac{\varepsilon i}{4} \cdot (2 A_0 A_2 + A_1^2).$$

$A_0 = 0$ gibt, da A_1^2 reell ist: M = rein imaginär, also $\mathfrak{M} = 0$: kein Gesamtdrehmoment, wenn das Feld im Unendlichen = 0 ist. Ist im Unendlichen das Feld, also A_0 von Null verschieden, so resultiert ein Drehmoment im allgemeinen auch dann, wenn $A_1 = 0$ ist (keine Gesamtladung). Gleichgewichtslagen ergeben sich nur, wenn $A_0 \cdot A_2$ reell ist. — Für eine einzige ebene unelektrische Platte erhält man leicht ein $\mathfrak{M}$ proportional sin 2β, wenn β der Winkel zwischen $\mathfrak{E}_\infty$ und Platte ist. Es folgt eine labile Gleichgewichtslage, wenn die Platte senkrecht zu $\mathfrak{E}_\infty$ steht, eine stabile, wenn sie parallel dazu ist (d. h. senkrecht zu den Potentiallinien im Unendlichen). Hydrodynamisch entspricht dem, wie wir sehen, daß eine drehbare lange Platte sich senkrecht zu dem Anblasestrom stellt, wenn Zirkulation und Gesamtkraft = 0 sind, wie man das auch beobachtet. — So lassen sich sämtliche Probleme übertragen.

Zusammenfassung.

Es wird die Analogie zwischen hydrodynamischen und elektrostatischen Kräften (Leiter im Dielektrikum) im zweidimensionalen Falle gezeigt. Die der Aerodynamik entsprechenden Formeln werden abgeleitet und an Beispielen erläutert.

Göttingen, Januar 1920.

(Eingegangen 8. Februar 1920.)

Zu Rayleighs Theorie des sekundären Lichtes.

Von W. Filehne.

In der Physiologischen Abteilung des Archivs für Anatomie und Physiologie 1919 ist von mir soeben eine Arbeit erschienen: „Das Blau der durch die menschliche Haut schimmernden Venen usw.", in der ich unter anderem (im Abschnitt V) das Aussehen trüber Medien in monochromatischen Lichtern verschiedener Wellenlängen bespreche. Ich hatte gefunden, daß ein trübes Medium gegen schwarzen Hintergrund in rotem, orangefarbenem und gelbem Teile des Bogenlichtspektrums nicht trübe und farbig, sondern klar und farblos gesehen wird. Im Grün zeigt sich die Trübung und sekundäres, schwaches, grünes Licht. Im Blaugrün, Blau und Violett war die Trübung sehr deutlich und allenthalben von der Farbe des auffallenden Lichtes. Bis zum Indigo, etwa bei $\lambda = 440\,\mu\mu$, nahm die physiologische Intensität des Lichteindrucks zu, von hier bis zum Ende des sichtbaren Spektrums wieder ab. Auf Grund dieser Beobachtungen schrieb ich (Seite 174): es „entspricht der Rayleighsche Satz, daß die Intensität des sekundären Lichtes umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge zu sein habe, so richtig er (selbstverständlich) mathematisch abgeleitet ist, nicht den Tatsachen."

Hier liegt ein Fehler vor. Die physiologischen Eindrücke sind es, die mit Rayleighs Satz im Widerspruch zu stehen scheinen. Ich hätte also mich wie folgt ausdrücken sollen:

„Für die physiologische Wirkung liegt also das Maximum des sekundären Lichtes

bei etwa $\lambda = 440\,\mu\mu$, obwohl physikalisch die Lichtintensität auch noch über Indigo (und Violett) hinaus weiter zunimmt. Während für ein und dieselbe Wellenlänge die physiologische Wirkung (Empfindung) mit zunehmender (physikalischer) Lichtintensität zunächst ebenfalls zunimmt, gilt für Lichter weitauseinanderliegender Wellenlängen nicht, daß das intensivere Licht eine stärkere Empfindung erzeuge als ein minder intensives Licht einer anderen Wellenlänge. Wir entwerfen von einem möglichst schwachen weißen Lichte das Spektrum und bringen das trübe Medium in dessen einzelnen Teile. Nur im Indigo erhalten wir (gleichfärbiges) sekundäres Licht. Lassen wir das weiße Licht an Intensität zunehmen, so werden auch Violett und Zyanblau, bei weiterer Verstärkung des weißen Lichtes auch Grün wirksam. Es mag ja sein, daß bei weiterer Lichtintensitätssteigerung — über die Intensitäten hinaus, die mir im Bogenlichte zur Verfügung standen, — auch noch im Gelb usw. sekundäres Licht erzeugt werden könnte, — aber über die Grenzen des sichtbaren Spektrums hinaus können wir kein sichtbares, sekundäres Licht erzeugen. Und Violett wirkt schwächer als Indigo."

Dieser Fassung gemäß ist der Abschnitt V meiner Arbeit zu berichtigen. Die übrigen neun Abschnitte der Arbeit bleiben hiervon unberührt. Es bleibt übrigens im Abschnitt V bestehen die Analogie zwischen der Lage des Maximums des sekundären Lichtes und der maximalen chemischzersetzenden Wirkung des Lichtes bei $\lambda = 440\,\mu\mu$ (z. B. auf Bromsilber). Bestehen bleibt dort auch die Ablehnung des Gedankens, daß der Himmel deshalb von uns blau gesehen werde, weil das ursprünglich überwiegend „violette", aus der Höhe kommende Licht auf seinem weiten Weg (durch die Atmosphäre hindurch) infolge von Extinktion mehr violettes als blaues Licht verloren hat. Dieser Verlust ist ja tatsächlich vorhanden. Aber auch ohne diesen Verlust würde das gesamte sekundäre Licht, trotz seines Gehalts an ungemein intensivem violetten Lichte, unserm Schorgane —, entsprechend seiner Organisation, — blau erschienen sein und nicht violett.

(Eingegangen 12. Februar 1920.)

Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen.

(Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung des Herrn H. C. Burger.)

Von Karl Lichtenecker.

1. In dieser Zeitschrift hat Herr H. C. Burger[1]) jüngst den Versuch gemacht, das Leitvermögen mischkristallfreier Legierungen zu bestimmen. Er beschränkt sich hierbei auf „verdünnte" Legierungen, bei denen das Volumen des einen der beiden Bestandteile nur einen gegen die Einheit kleinen Bruchteil X des Gesamtvolumens ausmacht. Mit dieser Einschränkung führt nun Herr Burger eine von ihm selbst als Näherung gekennzeichnete Rechnung durch, welche die Leitfähigkeit solcher verdünnter Legierungen ermitteln soll für den Fall, daß der die geringfügige Beimengung bildende Bestandteil in Form isolierter kleiner Partikel von besonders einfacher Form (Kugeln, Stäbchen, Plättchen) eingesprengt ist. Als Ziel seiner Arbeit bezeichnet Burger die Entscheidung der Frage, ob die Gestalt der Begrenzungen zwischen den die Legierung bildenden beiden Stoffen einen Einfluß auf den Wert der spezifischen Leitfähigkeit der Legierung besitzt und kommt zu dem Schluß, daß dies der Fall ist.

2. Es muß zunächst festgestellt werden, daß die von Burger mitgeteilten Endformeln in bestimmten Fällen zu unmöglichen Werten für die Leitfähigkeit der Legierung führen. Wir betrachten zunächst die beiden Grenzfalle, für welche, wie Verf. bereits an anderem Orte[2]) ausgeführt hat, das Ergebnis von vornherein zu übersehen ist.

A. Nichtleitendes Material in einem Leiter eingebettet.

In diesem Falle nimmt der eingesprengte Bestandteil an der Stromleitung nicht teil. Bezeichnet mit Burger σ_1 das Leitvermögen des Hauptbestandteils, σ_2 das des eingesprengten Bestandteils, so ist für diesen Fall zu setzen:

$$\sigma_1 = \text{endlich}, \qquad \sigma_2 = 0$$
$$x = \text{beliebig (klein gegen 1)}.$$

Die Endformeln (9), (10), (11) ergeben, je nachdem die eingesprengten Teilchen Kugeln, Platten oder Stäbchen sind, für die Leitfähigkeit σ der Kombination durch Einsetzung unmittelbar:

1) H. C. Burger, diese Zeitschr. **20**, 73, 1919.
2) K. Lichtenecker, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **14**, 466, 1917.

Kugeln . . . $\sigma = \sigma_1 (1 - \frac{3}{2} x)$
Platten . . . $\sigma = -\infty$
Stäbchen . . . $\sigma = \sigma_1 (1 - \frac{5}{3} x)$.

Setzen wir, um für das Folgende auch numerisch vergleichen zu können, beispielsweise

$\sigma_1 = 1 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad x = 0{,}01$

so würde folgen:

Kugeln . . . $\sigma = 1 - 0{,}015$
Platten . . . $\sigma = \infty$
Stäbchen . . . $\sigma = 1 - 0{,}0167$.

B. Leitendes Material in nichtleitendem Medium eingebettet.

In diesem Falle ist die Leitfähigkeit der Kombination gleich Null. Die Formeln Burgers dagegen ergeben für

$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 =$ endlich,
$x =$ beliebig, (klein gegen 1)

für Kugeln . . . $\sigma = 0$
„ Platten . . . $\sigma = \frac{2}{3} x \cdot \sigma_2$
„ Stäbchen . . . $\sigma = \frac{1}{3} x \cdot \sigma_2$

und, wenn man als Zahlenbeispielsweise, analog (*A*), die Werte:

$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = 1 \qquad x = 0{,}01$

einsetzt:

für Kugeln . . . $\sigma = 0$
„ Platten . . . $\sigma = 0{,}0067$
„ Stäbchen . . . $\sigma = 0{,}0033$.

Wie man sieht, führt die Burgersche Formel im Falle (*A*) für Platten, im Falle (*B*) sowohl für Platten als auch für Stäbchen zu unmöglichen Werten. Im ersteren Falle führt sie zu einem unendlichen Wert für die Leitfähigkeit der Kombination, trotzdem diese offenbar endlich, und zwar kleiner sein muß als die des leitenden Bestandteils, im letzteren Falle (*B*) ergibt die Formel zwei endliche, von Null verschiedene Werte für die Leitfähigkeit der Kombination, trotzdem nach der der Berechnung zugrunde gelegten Annahme die eingesprengten Partikel voneinander isoliert in Abständen, die groß sind gegen die Partikelgröße, im Nichtleiter eingebettet sind.

3. Nur in dem einen Falle, daß die eingelagerten Teilchen Kugelgestalt haben, ist das Ergebnis der Burgerschen Formel nicht von vornherein abzuweisen. Dieser Fall ist aber, wie ich ebenfalls in der vorgenannten Veröffentlichung erwähnt habe, bereits durch Maxwell[1]) erledigt. Der von Maxwell gegebene Ausdruck lautet:

$$W = \frac{2W_1 + W_2 + p(W_1 - W_2)}{2W_1 + W_2 - 2p(W_1 - W_2)} W_2,$$

wo $W_1 = \frac{1}{\sigma_2}$ und $W_2 = \frac{1}{\sigma_1}$ die spez. Widerstände des Einschlusses, bzw. des umgebenden Mediums, $p = x$ das Verhältnis des Kugelvolumens zum Gesamtvolumen bezeichnen. In der Burgerschen Bezeichnungsweise lautet somit die Maxwellsche Formel:

$$\sigma = \frac{2\sigma_1 + \sigma_2 - 2x(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_1 + \sigma_2 + x(\sigma_1 - \sigma_2)} \sigma_1.$$

Abweichend davon findet Burger (Gl. 9) den Ausdruck:

$$\sigma = \frac{2\sigma_1 + \sigma_2 - 3x(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_1,$$

der für kleine Werte x in erster Näherung mit dem Maxwellschen Ausdruck übereinstimmende Werte liefert[1]).

Der nach Burgers Formel für Kugeln sich ergebende Wert beträgt, wie weiter oben angegeben, $\sigma = 1 - 0{,}015$. Die durch die Einführung des zweiten Bestandteils in die Kombination entstehende Widerstandsänderung 0,015 ergibt sich somit gegenüber Maxwell um die Hälfte zu groß.

4. Es existiert nun allerdings ein beschränktes Gebiet, in welchem die Burgerschen Formeln brauchbare Resultate liefern könnten, dann nämlich, wenn der Quotient $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ von der Einheit nicht sehr abweicht, eine Annahme, die der Burgerschen Ableitung allerdings fremd ist[2]). Gerade dieser Fall aber hat natürlich praktisch die größte Bedeutung, da die bekannten mischkristallfreien Legierungen sämtlich unter diesen Fall eingereiht werden können. Unter dieser einschränkenden Annahme stimmt nicht nur der Zahlenwert, der sich aus Burgers Formel für Kugeln berechnet, mit dem aus der Maxwellschen Formel sich ergebenden überein, sondern es liegen auch die nach Burger folgenden Werte für alle drei Fälle (eingesprengte Kugeln, Platten und Stäbchen) innerhalb der Grenzen, welche Verf. als bei beliebiger Materialverteilung gültig dargetan hat[3]).

1) M. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsche Übersetzung, I. Bd., S. 457, Berlin 1883.

1) In zweiter Näherung beträgt die Abweichung, um die der Burgersche Wert von σ gegenüber dem von Maxwell kleiner ist, $3x^2 \cdot \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 \cdot \sigma_1$ und, wenn σ_2 gegen σ_1 überwiegt, $3x^2\sigma_1$.

2) Burgers Formel führt übrigens nicht nur in den beiden besprochenen Grenzfällen zu unmöglichen Resultaten. Für Platten z. B. sänke danach die Gesamtleitfähigkeit bei Abnahme der Leitfähigkeit des eingesprengten Bestandteils sehr bald auf Null, um weiterhin negative Werte anzunehmen u. a. m.

3) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 19, 374, 1918.

So ergibt sich beispielsweise für

$\sigma_1 = 1 \qquad \sigma_2 = 2 \qquad x = 0{,}01$

als obere mögliche Grenze der Leitfähigkeit . . . . . $\sigma = 1{,}01$

als untere mögliche Grenze der Leitfähigkeit . . . . . $\sigma = 1{,}005$

nach Burger in Übereinstimmung mit Maxwell für Kugeln: . . $\sigma = 1{,}0075$

also genau das Mittel der Grenzwerte.

Die gleichen Zahlenwerte σ_1, σ_2, x geben nach Burger

für Platten . . . $\sigma = 1{,}0083$

für Stäbchen . . . $\sigma = 1{,}0078$,

wie man sieht, sämtlich im Innern des angegebenen Intervalls.

5. Diesen zuletzt angeschriebenen numerischen Werten muß man leider entnehmen, daß die Burgersche Formel gerade innerhalb des Gebietes, in dem sie mit der Theorie verträgliche Ergebnisse liefert, nichts Einwandfreies auszusagen vermag. Die Unterschiede der Leitfähigkeiten, die sie in den drei behandelten Fällen liefert, sind trotz der extremen Formunterschiede der als eingesprengt angenommenen Partikel nicht nur an sich gering, sondern im Hinblick auf die Ableitung Burgers durchaus unsicher. Herr Burger kennzeichnet seine Ableitung selbst richtig als erste Näherung, indem er die Abweichung des mittleren Feldes vom ungestörten Felde, entwickelt nach Potenzen von x, mit der ersten Potenz abbricht; das Gleiche hat für eine analoge Entwicklung bezüglich der mittleren Leitfähigkeit statt. Ist, wie in dem gewählten Beispiel, x von der Größenordnung der Hundertstel, so werden durch die von Burger gemachte Näherung Abweichungen der so ermittelten Leitfähigkeit vom wahren Werte im Betrage von einigen Zehntausendsteln von vornherein zu erwarten sein; nun betragen aber die nach Burger sich ergebenden Abweichungen für verschiedene Gestalt der Einsprengung nur 3, bzw. 5 Zehntausendstel vom mittleren Werte. — Man wird daher sagen müssen, daß diese Unterschiede, deren Nachweis sich Herr Burger als Ziel seiner Untersuchung gesetzt hat, durch seine Ableitung nicht als mit Sicherheit erwiesen gelten können[1]).

7. Wenn man der Burgerschen Formel — allerdings mit der ihrer Ableitung anhaftenden Unsicherheit — etwas entnehmen kann, so ist es das, daß die Unterschiede in der Leitfähigkeit, die durch die Gestalt der Materialgrenzen zwischen den Legierungsbestandteilen für praktisch in Betracht kommende Werte des Quotienten $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ hervorgerufen werden, jedenfalls recht gering sind[2]). Dadurch würde sie dazu beitragen, die gute Übereinstimmung der vom Verf. unter der — vollkommen willkürlichen — Annahme der tesseralen Raumgitteranordnung[3]) durchgeführten Berechnung der Legierungswiderstände mit den Messungen dieser Widerstände durch Matthiesen erklärlich zu machen und ihre Berechtigung über das Gebiet der erfolgten Verifikation durch die Erfahrung hinaus, hervortreten zu lassen.

1) Man wird übrigens die Grundauffassung, auf der die Ableitung Herrn Burgers beruht, daß nämlich der eine Bestandteil in vollkommen isolierten Partikeln eingesprengt ist, auch dann nicht allseits als für wirkliche Legierungen mit Notwendigkeit zutreffend anerkennen, wenn x eine gegen 1 kleine Zahl ist. Selbst wenn $\sqrt{x}$ noch klein gegen 1 ist, ist eine dendritische Struktur der Einlagerung, wie sie von C. Benedicks vermutet wird, durchaus nicht ausgeschlossen. Dem Nachweis des wirklichen Vorkommens solcher Strukturen innerhalb der Legierungen sollten C. Benedicks Versuche ja gelten. (Vgl. C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.)

2) Eine gewisse Abhängigkeit der Leitfähigkeit, innerhalb der vom Verf. festgestellten Grenzen, von der Gestalt der Partikel erscheint von vornherein durchaus wahrscheinlich. Das Gegenteil hat Verf. auch in seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand vom Jahre 1909 weder behauptet noch angenommen.

3) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 10, 1005, 1909.

Wien, 31. Januar 1920.

(Eingegangen 8. Februar 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Sterne.

Von Hans Kienle

Mit Tafel III.

Das vor kurzer Zeit[1]) erfolgte Aufleuchten eines überaus hellen neuen Sternes im Sternbilde des Adlers hat wohl über den Kreis der Fachastronomen hinaus Aufsehen erregt und das Interesse an diesen seltsamen Himmels-

1) Anmerkung bei der Korrektur 13. Mai 1919: Die äußeren Verhältnisse verzögerten den Abdruck des bereits im Juli vorigen Jahres geschriebenen Aufsatzes. Zur Zeit seiner Abfassung war eine Diskussion der Erscheinung der Nova Aquilae 3 noch nicht möglich. Was inzwischen hierüber veröffentlicht worden ist, bietet keine Veranlassung zu irgendwelchen Änderungen der vorliegenden Ausführungen.

Tabelle I.

	Name	$\alpha_{1900,0}$	$\delta_{1900,0}$	β	t	h_m
1	B Cassiopejae	$0^h\ 19^m\ 15^s$	$+63^\circ\ 33',5$	$+\ 1^m,8$	1572	−5 M:
2	P Cygni	20 14 6	+37 43,3	+ 1,3	1600	3,5
3	Nova Serpentarii	17 24 38	−21 23,7	+ 0,3	1604	−4:
4	H Vulpeculae	19 43 28	+27 4,2	+ 0,9	1670	3
5	Nova Ophiuchi	16 53 54	−12 44,4	+17,2	1848	5,5
6	T Scorpii	16 11 5	−22 43,6	+18,9	1860	7,0
7	T Coronae	15 55 19	+26 12,2	+47,8	1866	2,0
8	Q Cygni	21 37 47	+42 23,1	− 7,5	1876	3
9	S Andromedae	0 37 15	+40 43,2	− 21,2	1885	7
10	V Persei	1 55 6	+56 50,0	− 4,3	1887	9,2
11	T Aurigae	5 25 34	+30 22,2	− 1,2	1891	4,5
12	R Normae	15 22 11	−50 13,9	+ 4,4	1893	7,0
13	RS Carinae	11 3 54	−61 23,6	− 1,8	1895	8
14	Z Centauri	13 34 18	−31 8	+29,7	1895	7
15	Nova Sagittarii 1	18 56 13	−13 18,2	− 8,7	1898	4,7
16	RS Ophiuchi	17 44 48	−10 40	+ 5,2	1898	7,7
17	Nova Aquilae 1	19 15 16	− 0 19,2	− 7,0	1899	7
18	Nova Sagittarii 3	18 13 48	−25 13,5	− 8,4	1899	8,5
19	Nova Persei	3 24 24	+43 33,7	− 9,6	1901	0,0
20	Nova Sagittarii 4	18 0 27	−27 26,5	− 3,8	1901	10,4
21	Nova Geminorum 1	6 37 49	+30 2,7	+12,2	1903	5,1
22	Nova Aquilae 2	18 56 48	− 4 35,2	− 4,8	1905	9,1
23	Nova Velorum	10 58 20	−53 50,9	+ 4,9	1905	9,7
24	SU Lyrae	18 50 7	+36 23,1	+15,2	1905	10
25	Nova Scorpii	17 47 28	−34 10,7	− 2,2	1906	8,8
26	Nova Circini	14 40 31	−59 35,0	− 0,8	1907	9,5
27	Nova Piscium	0 29 49	+ 9 45	−50,2	1910	8,8
28	Nova Sagittarii 2	17 53 29	−27 32,8	− 2,0	1910	7,5
29	Nova Arae	16 33 1	−52 13,5	− 4,4	1910	6,0
30	Nova Lacertae	22 31 45	+52 11,9	− 4,7	1910	5,0
31	Nova Geminorum 2	6 48 25	+32 16,0	+15,2	1912	3,7
32	Nova Ritchey	20 32 47	+59 46,8	+11,8	1917	13,5
33	Nova Monocerotis	7 21 54	− 6 28,5	+ 4,9	1918	5,4
34	Nova Aquilae 3	18 43 48	+ 0 28,4	+ 0,4	1918	− 0,2

erscheinungen geweckt. Nun vermitteln zwar manche Darstellungen in populären Werken das Wichtigste, was wir heute über die neuen Sterne wissen, aber eine ganze Reihe von theoretischen Arbeiten zur Erklärung und Begründung der Vorstellungen, die wir uns von der Entstehung der neuen Sterne machen, haben bisher keine zusammenfassende Bearbeitung gefunden. Eine solche zu geben, erscheint daher nicht unangebracht.

Die Bezeichnung „neue Sterne" entstammt noch einer Zeit, die diese Sterne als wirklich neu geschaffen ansah, während wir heute wissen, daß all diese Sterne schon vorher am Himmel standen und daß das Aufleuchten nur eine Episode in ihrem Dasein darstellt. Seit man T Coronae nachträglich auf den Karten der Bonner Durchmusterung hat auffinden können, sind die Fälle sehr zahlreich geworden, in denen es gelang, auf früheren photographischen Aufnahmen den „neuen" Stern als schwach leuchtenden Himmelskörper nachzuweisen. Für uns besteht daher zwischen diesen „neuen" Sternen und den „veränderlichen" Sternen kein prinzipieller Unterschied. Wir betrachten sie weniger als gekennzeichnet durch ihren Helligkeitsverlauf, denn vielmehr durch die Eigentümlichkeiten ihres Spektrums; und selbst dann bleibt es noch bei einigen der neuen Sterne zweifelhaft, ob man sie nicht als Veränderliche von langer Periode ansehen soll.

Im folgenden sei zunächst eine Zusammenstellung der bisherigen Erscheinungen von neuen Sternen gegeben, die zum Teil der 5. Auflage von Newcomb-Engelmanns Populärer Astronomie entnommen ist. Die Tabelle gibt neben dem Namen des Sternes Rektaszension und Deklination für 1900,0; die galaktische Breite β (auf die wir später zurückkommen werden), das Jahr des Aufleuchtens (unter t) und die maximale Helligkeit h_m. Man erkennt deutlich die rasche Zunahme von neuen Sternen mit Einführung der Photographie, insbesondere der photographischen Spektroskopie. Die meisten dieser Sterne sind gar nie über teleskopische Sichtbarkeit hinausgekommen und die glänzenden Erscheinungen sind nach wie vor verhältnismäßig selten.

Der Helligkeitsverlauf.

Die neuen Sterne sind zunächst dadurch charakterisiert, daß sie von der völligen Unsichtbarkeit oder doch von sehr geringer Helligkeit plötzlich zu verhältnismäßig starkem Leuch-

ten kommen, das aber bald wieder abklingt und die Sterne zu dem früheren Zustande oder nahe demselben zurückkehren läßt. Es liegt in der Natur der Sache, daß die neuen Sterne erst entdeckt werden, wenn sie ihre Maximalhelligkeit bereits erreicht haben oder sich gar schon wieder auf dem absteigenden Aste der Helligkeitskurve befinden. Wir wissen darum im allgemeinen über die Schnelligkeit des Anstieges nur wenig zu sagen. Doch war man in einigen Fällen so glücklich, wenigstens ungefähre obere Grenzen für die Dauer der Helligkeitszunahme angeben zu können, und man kann daraus den Schluß ziehen, daß das Aufleuchten wohl sehr rasch erfolgt, vielleicht im Verlaufe von wenigen Stunden; zum mindesten innerhalb weniger Tage. T Coronae z. B. wurde am 12. Mai 1866 um 12 Uhr als Stern 2. Größe entdeckt, während noch um $9^1/_2$ Uhr an der betreffenden Stelle sicher kein dem bloßen Auge sichtbarer Stern vorhanden war. Nova Persei war bei ihrer Entdeckung am 21. Februar 1901 von der Größe 2,5 und noch auf einer 28 Stunden vorher gemachten photographischen Aufnahme, die Sterne 12. Größe enthielt, nicht zu sehen. Ähnlich war es bei der Nova Geminorum 2. Sie war am 11. März 1912 von der Größe 4,5 und noch 23 Stunden vorher, wie man ebenfalls durch photographische Aufnahmen nachweisen konnte, schwächer als 10. Größe. Schließlich sei noch die Nova Aquilae 3 erwähnt, die nach Aufnahmen von Wolf in Heidelberg noch am 5. Juni die gleiche Größe (11,5) wie früher hatte, während sie am 8. Juni sicher schon 1. Größe war. Man darf also wohl den Schluß ziehen, daß der aufsteigende Ast der Lichtkurve ziemlich steil verläuft. Dabei handelt es sich vielfach um ganz enorme Helligkeitszunahmen; bei Nova Persei z. B. um mindestens das 10 000fache der ursprünglichen Intensität.

Das Maximum der Helligkeit wird nur kurz innegehalten. Es erfolgt sehr bald eine Abnahme, zunächst langsam und vielfach unter Schwankungen. Bei einigen Sternen tritt dann ein ziemlich plötzlicher Abfall der Helligkeit ein, wie die Kurve von T Aurigae (Fig. 1) zeigt, bei anderen wieder hält das langsame Abklingen unter stetigen Schwankungen an, wie z. B. bei Nova Persei (Fig. 2). Jedenfalls aber ist die ganze Erscheinung von sehr begrenzter Dauer und ist in der Hauptsache nach Wochen oder wenigen Monaten als beendet zu betrachten. Parallel mit der Helligkeitsabnahme geht vielfach ein Wechsel der Farbe. Die Novae sind in der Regel beim Aufleuchten weiß und werden dann mit abnehmender Helligkeit gelb bis rötlich, zuweilen sogar ziemlich intensiv rot.

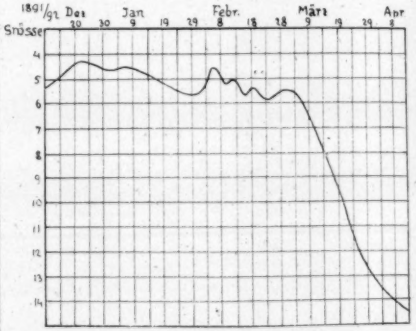


Fig. 1.

Das typische Nova-Spektrum.

Wie schon oben betont wurde, hat man als das beste Charakteristikum der neuen Sterne ihr Spektrum zu betrachten. Man kann von einem „typischen Nova-Spektrum" sprechen, und in der Tat verdanken eine Reihe der in Tabelle 1 aufgeführten Novae aus der neueren Zeit ihre Aufnahme unter diese Kategorie von Sternen nur ihrem Spektrum, an dem sie — oft lange, nachdem die Erscheinung schon vorüber war — erkannt wurden. Dieses Spektrum und die Veränderungen, die es im Verlaufe der Erscheinung erleidet, mögen im folgenden kurz erläutert werden:

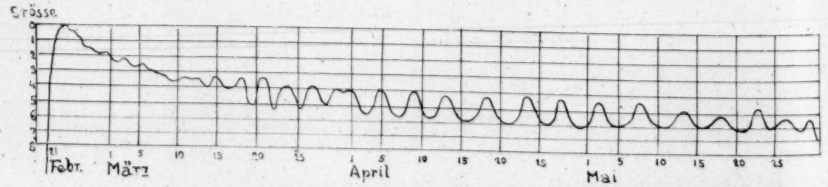


Fig. 2.

Tabelle II.

Linie	$H\beta$	$H\gamma$	$H\delta$	$H\varepsilon$	K	Mittel
Mitte der dunklen Linie	—	—1,2	—1,1	—	—	—1,2 $\mu\mu$
Helle Linie in der dunklen	—1,0	—0,9	—0,8	—1,0	—0,9	—0,9
1. Maximum der hellen Linie	0,0	0,0	—0,1	—0,2	—0,2	—0,1
2. Maximum der hellen Linie	+0,8	+0,8	+0,6	+0,4	+0,3	+0,6
3. Maximum der heilen Linie	+1,5	+1,4	—	—	—	+1,5

Im ersten Stadium bildet ein weit ins Blau und Violett sich erstreckendes kontinuierliches Spektrum den hell leuchtenden Untergrund, von dem sich dunkle Absorptionslinien abheben, die wegen ihrer Breite eher als „Bande" zu bezeichnen sind. Gleichzeitig oder doch schon nach wenigen Tagen lassen sich helle Emissionslinien erkennen, die zum größten Teil dem Wasserstoff, daneben auch dem Helium, Kalzium und Natrium angehören. Die hellen Linien, besonders des Wasserstoffes, sind meist ebenfalls sehr breit und zeigen bis zu drei Intensitätsmaxima, von denen das eine an der brechbareren Seite den scharfen Rand bildet und nur wenig oder gar nicht nach dem roten Ende zu gegen die normale Linie verschoben ist. Nach der weniger brechbaren Seite sind die Linien verwaschen. Umgekehrt sind die Absorptionsbande, die sich stets auf der brechbareren Seite der Emissionslinien befinden, nach dem Rot zu scharf begrenzt, verschwimmen gegen das blaue Ende und zeigen nahe ihrer Mitte meist noch ein helles Maximum. So kommt das für die neuen Sterne charakteristische Doppelspektrum zustande, wie es bei jedem dieser Sterne in mehr oder weniger ausgeprägter Form bisher beobachtet wurde: Helle Linien auf kontinuierlichem Untergrunde mit dunklen Begleitern auf der brechbareren Seite. Die Verschiebungen der einzelnen Intensitätsmaxima sind dabei für alle Sterne nahe von der gleichen Größenordnung. Tabelle 2 gibt sie nach Scheiner, „Populäre Astrophysik", für die Wasserstofflinien im Spektrum der Nova Aurigae.

Die Struktur im einzelnen variiert selbst bei der gleichen Linie oft sehr stark, wie z. B. die folgenden Zeichnungen von Furuhjelm (Fig. 3) zeigen, welche die Intensitätsverhältnisse der Wasserstoff-Linien H_δ und H_γ im Spektrum der Nova Geminorum 2 an verschiedenen Tagen darstellen.

Man erkennt daran als von jedem Wechsel unberührt nur das Vorhandensein einer Emissionslinie und ihres dunklen Begleiters, während die einzelnen Maxima oft ganz verschwinden und dann wieder in reicher Anzahl auftreten.

Schließlich seien auch noch einige Spektralaufnahmen der Nova Geminorum mit dem Potsdamer Spektrographen im Bilde vorgeführt, um die typische Wandlung des Spektrums in den ersten Tagen zu zeigen. Man erkennt insbesondere an der Aufnahme von März 1913 sehr schön die hellen Linien mit den dunklen Begleitern, in denen noch eine Aufhellung sich vorfindet, genau wie dies aus Tabelle 2 für T Aurigae hervorgeht.

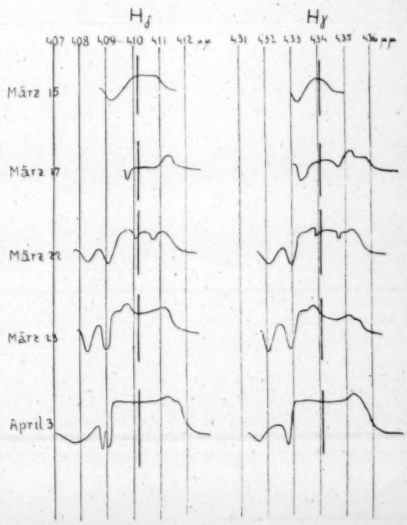


Fig. 3.

Im weiteren Verlaufe nimmt das kontinuierliche Spektrum mehr und mehr an Helligkeit ab, die äußeren Partien und ebenso die dunklen Linien verschwinden ganz, und das Spektrum zieht sich schließlich auf einige wenige helle Linien im Grün und Gelb zusammen. Unter diesen übrigbleibenden hellen Linien ist besonders eine von großer Bedeutung: die erste Nebellinie λ 5007. Sie tritt neben anderen Nebellinien im Endstadium fast aller neuen Sterne auf, so daß man die Entwicklung da-

hin charakterisieren kann, daß das Spektrum der Novae in das der Gasnebel übergeht. Damit scheint aber die Entwicklung ihr Ende noch nicht erreicht zu haben. Wenigstens scheint bei einigen der noch nach Jahren als schwache Sterne sichtbaren Novae eine große Ähnlichkeit des Spektrums mit demjenigen der Wolf-Rayet-Sterne vorhanden zu sein[1]). Doch ist diese Feststellung noch unsicher, und es ist zum mindesten der manchmal gezogene Schluß verfrüht, daß wir in den Wolf-Rayet-Sternen frühere „neue" Sterne zu sehen hätten. Wir werden unten noch einen anderen Grund kennen lernen, der gegen diese Vermutung spricht.

Nebelerscheinungen in der Umgebung der neuen Sterne.

Der Übergang des Novaspektrums in ein Nebelspektrum läßt den Gedanken naheliegend erscheinen, daß sich der Stern überhaupt in einen Nebel verwandelt habe. In der Tat haben eine Reihe von Beobachtern das Aussehen der Novae im vorgerückten Stadium ihrer Entwicklung mit dem der planetarischen Nebel verglichen. Schon bei der Nova Cygni wollte Huggins eine schwache Nebelhülle bemerkt haben, und ähnliche Behauptungen wiederholten sich bei T Aurigae und Nova Persei. Bei letzterer nun konnte M. Wolf mit untrüglicher Sicherheit den rein optischen Charakter dieser scheinbaren Nebelhülle nachweisen, die nur in den von Refraktoren entworfenen Bildern auftritt und in unvollständiger Achromatisierung des Linsensystems ihren Grund hat. Das Licht der neuen Sterne ist so sehr von dem der gewöhnlichen Sterne verschieden, daß sie im allgemeinen einen ziemlich von diesen abweichenden Fokus bedingen. Ist aber auf eine der hellen Linien, z. B. die grüne Nebellinie, fokussiert, dann liefern die anderen Linien Zerstreuungskreise, die einen Nebel von gar nicht geringer Ausdehnung vortäuschen. Wolf konnte die Übereinstimmung des theoretischen und des tatsächlichen Durchmessers der Aureole an mehreren Aufnahmen nachweisen. Diese Tatsache läßt natürlich auch alle früheren Beobachtungen von Nebelhüllen als wenig glaubwürdig erscheinen; doch läßt sich nachträglich keine Entscheidung über die Realität der Erscheinungen treffen.

Etwas ganz anderes nun ist es mit den Nebeln, die Wolf in der Umgebung der Nova Persei auffand, gerade als er den optischen Charakter der von anderer Seite gemeldeten Nebelhüllen aufdeckte. Hier handelte es sich um zwar schwache, aber trotzdem strukturreiche Nebelmaterie im Gegensatz zu dem durchaus symmetrischen Aussehen der optischen Aureole, so daß an ihrer Realität nicht gezweifelt werden konnte. Das Interesse, das dieser Erscheinung entgegengebracht wurde, erhöhte sich noch, als weitere Aufnahmen von Ritchey und Perrine die Nebelmaterie in lebhafter radialer Ausdehnung befindlich zeigten; denn diese Ausdehnung erfolgte mit einer Geschwindigkeit, wie man sie in solchen Fernen des Fixsternsystems nie zu beobachten gewohnt war. Das Aussehen und die Bewegung der durch die langen Daueraufnahmen (Expositionszeiten von 2^h bis 7^h) festgestellten Nebel möge hier mit den Worten Kopffs charakterisiert werden, der eine sehr wertvolle und eingehende Untersuchung darüber angestellt hat[1]). Zwei Aufnahmen von Ritchey (Fig. 5) dienen zur Erläuterung.

„Im wesentlichen kann man also in der Umgebung der Nova dreierlei in Entfernung und Verhalten verschiedene Kondensationen unterscheiden:

1. Den Nebel *m*, der bis Anfang Dezember eine konstante Entfernung von etwa 135″ von der Nova hat, der sich bis Mitte Dezember nach S bewegt und dann mit großer Geschwindigkeit hauptsächlich nach W und NW ausbreitet.

2. Die Nebel der inneren Ellipse, die anfangs eine mittlere tägliche Geschwindigkeit von etwa 2″ haben, die von August ab auf 1″, später noch weiter heruntersinkt. Von Einzelheiten abgesehen, hört die Bewegung im Februar fast ganz auf, wächst aber dann rasch zu der früheren Geschwindigkeit wieder an. Die Nebel sind einer lebhaften Form- und Helligkeitsänderung unterworfen. Der Abstand der im SO gelegenen hellsten Gruppe ist für August im Mittel 384″, für Mitte Dezember 492″.

3. Die Nebel der äußeren Ellipse, die im allgemeinen sehr schwach sind, von denen einzelne aber zu bedeutender Helligkeit anwachsen. ... Die Nebel haben sich mit nahezu doppelt so großer Geschwindigkeit wie die inneren Nebel von der Nova entfernt; diese Geschwindigkeit läßt aber schon Ende 1901 bedeutend nach, so daß eine augenfällige Vergrößerung der äußeren Ellipse nicht mehr wahrzunehmen ist. Die große Achse zeigt anfangs

1) Gelegentlich der Nova Aquilae 3 bemerkt M. Wolf nach einigen Ausführungen über das Linienge wirr des Spektrums: „Es scheint mir die ganze Erscheinung die größte Ähnlichkeit mit jener zu besitzen, die ich 1915 bei den Wolf-Rayet-Sternen zu entwirren versucht habe" (Astr. Nachr. **207**, 64).

1) A. Kopff, Über die Nebel der Nova Persei. Publ. d. Astrophysikalischen Inst. Königstuhl-Heidelberg. Bd. II, Nr. 9.

Januar 1902 eine Ausdehnung von 1065" im Mittel, die kleine von 849". Der Abstand der äußeren Nebel ist also ziemlich genau das Doppelte desjenigen der inneren.

Zu erwähnen ist noch, daß der Positionswinkel für innere und äußere Nebel der Hauptsache nach kleiner wird."

Dieser Beschreibung ist kaum etwas hinzuzufügen. Es sei nur besonders auf die von Kopff unter 2. gemachte Feststellung hingewiesen, daß die Nebel einer „lebhaften Form- und Helligkeitsänderung unterworfen" sind, und daß die Ausdehnung nicht radial erfolgt, sondern von Änderungen im Positionswinkel begleitet ist.

Ältere Theorien über die Entstehung der neuen Sterne.

Jede Theorie der neuen Sterne, die ernst genommen werden will, muß Rücksicht nehmen auf die spektralen Eigentümlichkeiten und muß in erster Linie sie zu erklären versuchen. Es ist darum begreiflich, daß gerade die spektroskopischen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte den älteren Theorien ihr Todesurteil gesprochen haben. Sie können deshalb hier füglich übergangen werden, und es genügt, auf die Darstellungen in populären Werken hinzuweisen[1]). Eine kurze Besprechung möge nur die insbesondere von H. C. Vogel noch anläßlich der Nova T Aurigae verfochtene Hypothese finden, welche das Phänomen der neuen Sterne durch das Eindringen eines dunklen Weltkörpers in ein Planetensystem und die dadurch bedingten nahen Vorübergänge oder gar Zusammenstöße zweier Weltkörper zu erklären sucht[2]). Vorauszuschicken wäre, daß diese Hypothese die Verschiebung der Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip, d. h. durch Bewegung in der Gesichtslinie, erklären will, und daß sie daher dem in das Planetensystem eindringenden Körper das kontinuierliche Spektrum mit den Absorptionsbanden zuspricht, und dem oder den anderen Körpern, in deren Nähe er gelangt und die er dadurch zum Aufleuchten bringt, das helle Linienspektrum. Aus dieser Annahme resultieren wegen der starken Linienverschiebungen außerordentlich große Radialgeschwindigkeiten. Man hat bekanntlich die Beziehung

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

wenn λ die Wellenlänge, $d\lambda$ die Verschiebung, v die Radialgeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Nun entspricht den in Tabelle 2 angeführten Mittelwerten der Verschiebung eine Wellenlänge von $\lambda = 425\,\mu\mu$, so daß man die bezüglichen Radialgeschwindigkeiten -847, -635, -71, $+424$, $+1059$ km/sec hätte. -847 km sec wäre die der Nova, d. h. dem eindringenden Körper zuzusprechende Geschwindigkeit. Auf Grund von einfachen Betrachtungen über parabolische und hyperbolische Bahnen, die wiederzugeben hier zu weit führen würde, kommt Seeliger[1]) zu folgenden Abschätzungsformeln für die Summe μ der Massen der beiden in Betracht kommenden Körper (in Einheiten der Sonnenmasse):

$$\mu > 0{,}009123 \left(\frac{v}{V}\right)^3 \cdot t \quad \text{für parabolische Bahn}$$

$$\mu > 0{,}0104 \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2} \left(\frac{v}{V}\right)^3 \sqrt{e} \cdot t \quad \text{für hyperbolische Bahn.}$$

Darin ist v die relative Bahngeschwindigkeit der beiden Körper, in unserem Falle also mindestens 800 km/sec, V die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, v_0 die Geschwindigkeit im Unendlichen, e die Exzentrizität der Hyperbel und t schließlich die Zeit vom Periastron aus gezählt. Für t muß mindestens 60 Tage gesetzt werden, da das Aufleuchten der Nova, also das Periastron, auf Ende Dezember 1891 anzusetzen ist, und die obigen Spektralaufnahmen zum Teil aus dem März 1892 stammen. Faßt man beide Formeln zusammen, so findet man mit genügender Annäherung:

$$\mu > \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2} \sqrt{e} \cdot 10^4 \text{ Sonnenmassen.}$$

Für die Parabel also ($v_0 = 0$, $e = 1$): $\mu > 10000$ Sonnenmassen. Und für die Hyperbel selbst noch für $\frac{v_0}{v} = 0{,}9$ rund $900\sqrt{e}$ Sonnenmassen.

Man sieht daraus, daß die Vogelsche Hypothese entweder unwahrscheinlich große Massen (Parabel oder Hyperbel mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit) oder aber unwahrscheinlich große Anfangsgeschwindigkeiten ($v_0 \sim 800$ km) erfordert. Dabei haben wir oben noch den der Hypothese günstigsten Fall angesetzt, indem wir den 2. Körper mit dem 1. Intensitätsmaximum identifizierten. Würden wir statt dessen das 3. wählen, so kämen wir auf Relativgeschwindigkeiten von nahezu 2000 km/sec, und unsere letzte Formel gäbe als Abschätzung:

$$\mu > 16 \cdot \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2} \sqrt{e} \cdot 10^4 \text{ Sonnenmassen.}$$

1) Siehe Nachtrag!

2) H. C. Vogel, Über den neuen Stern im Fuhrmann. Abh. K. Pr. Akademie d. Wiss. Berlin 1893.

1) H. Seeliger, Über den neuen Stern im Fuhrmann. Astr. Nachr. 130, 393 und 133, 305.

Da Vogel nicht so sehr an direkte Zusammenstöße denkt als vielmehr an mächtige Flutwirkungen (entsprechend der von Wilsing im Anschluß an Klinkerfues für gewisse Typen von veränderlichen Sternen aufgestellten Fluthypothese) beim Vorübergange des Eindringlings an Gliedern des Planetensystems, so macht Seeliger auch noch Abschätzungen über die Dauer der Einwirkung beider Körper aufeinander. Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben findet sich für Parabel und Hyperbel die Formel:

$$r > 1{,}06 \sqrt{v^2 - v_0^2} \cdot t$$

für den Abstand r beider Körper. Setzt man wieder $v = 800$ km/sec, so erhält man für:

$v_0 = 0$ $\quad r > 73 \cdot 10^6 t$ km
$v_0 = 400$ km $\quad r > 64 \cdot 10^6 t$ km
$v_0 = 760$ km $\quad r > 35 \cdot 10^6 t$ km

Darin ist t in Tagen ausgedrückt. Der Vorübergang beider Körper erfolgt also so überaus rasch, daß an nachhaltige Einwirkungen auch nur einen Tag vor oder nach dem Vorübergange kaum zu denken ist. Überdies betont Seeliger mit Recht, daß unsere Ansichten über die Wirkung von Ebbe und Flut vorerst rein statisch fundiert sind, und daß wir schlechthin nichts auszusagen vermögen über die hier in Frage stehenden Vorgänge.

Ein letztes und nicht zu gering einzuschätzendes Argument gegen die Vogelsche Hypothese ist die außerordentlich geringe Wahrscheinlichkeit dafür, daß der eindringende Körper sich nahe in der Ebene des Planetensystems bewege — in Analogie zu unserem System müssen wir eine im wesentlichen ebene Orientierung annehmen —, und daß er nicht nur mehreren der Planeten, sondern, wie Vogel will, auch dem Zentralkörper begegne.

(Fortsetzung folgt.)

Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre [1].

Von J. E. Lilienfeld und Franz Rother.

Berichtigung.

Infolge irrtümlicher Inbezugsetzung der Polarisationsebene des Nicols zur Richtung des elektrischen Vektors hat die Formulierung eines der Ergebnisse unserer Untersuchung eine bedauerliche Entstellung erfahren. Der elektrische Vektor des linear polarisierten Brennflecklichtes schwingt nicht parallel, sondern senkrecht zur Ebene des Antikathodenspiegels. Insofern bedürfen die §§ 8 und 10 unserer Arbeit einer Richtigstellung. Hinzugefügt sei, daß die gegenwärtig noch erheblichen Spielraum enthaltenden Fehlergrenzen der Winkelmessung immerhin Abweichungen der Schwingungsrichtung von dem auf dem Spiegel errichteten Lote bis zu 5^0 zulassen würden.

Auch der Inhalt des die physikalische Auffassung der Vorgänge berührenden § 17 hat demzufolge eine entsprechende Änderung zu erfahren. Es dürfte zwar nach wie vor daran festzuhalten sein, daß die lichtemittierenden Elektronen zwischen den Belegen der Doppelschicht schwingen, jedoch nicht annähernd parallel zur Brennfleckebene, sondern senkrecht dazu.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 8. Juli 1920.

[1] Diese Zeitschr. Nr. 10, 21. Jahrgang, vom 15. Mai 1920.

Berichtigung.

Eine Schwebungsmethode zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren.

In der unter obigem Titel in dieser Zeitschrift 21, 1920, S. 208 abgedruckten Arbeit von R. Ettenreich ist folgender Fehler unterlaufen: In Fig. 5, Audiongenerator in Spannungsteilerschaltung, sind die Spulenanschlüsse von Gitter und Glühkathode vertauscht.

Wien, 30. Mai 1920.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.

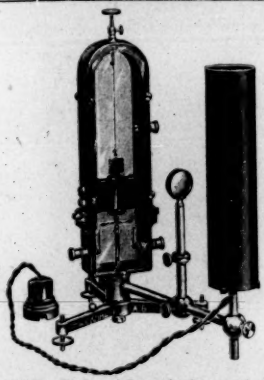
Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. Max Lembert für allgemeine und anorganische Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor für angewandte Physik an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer zum ord. Professor ebenda, der ord. Professor an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Liebmann zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg, Dr. Erwin Freundlich zum Observator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe und Vorstand der chemisch-technischen Prüfungs- und Versuchsanstalt Dr. Paul Eitner zum ord. Honorarprofessor ebendaselbst, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Robert Winger zum ord. Professor der Geophysik an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Technischen Hochschule München Dr. Max Lagally zum ord. Professor für angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden, der frühere ord. Professor an der Universität Straßburg Dr. Emil Cohn zum ord. Honorarprofessor der theoretischen Physik an der Universität Freiburg i. Br.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Verlag von S. HIRZEL in LEIPZIG

Gleichen, A., Leitfaden der praktischen Optik. Mit 158 Abb. Groß-8°. 1906. Geh. M. 11.20, geb. M. 15.—

Zum ersten Male ist hier ein Werk geschaffen worden, das die Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, ihre Konstruktion und Berechnung unter Anwendung der ersten Elemente der Algebra darstellt und das daher auch den sich mit der praktischen Optik Beschäftigenden verständlich ist, denen das erforderliche Maß mathematischer Kenntnisse zum Studium anderer Werke meist nicht zur Verfügung steht.

Gegen Höchstgebot

sind zu verkaufen

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Band 1—10, elegant gebunden, Band 11 bis 16 geheftet.

Physikalische Zeitschrift. Band 1 bis 14II elegant gebunden, Band 15—20 geheftet. Angebote unter **S. H. 567** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Kurzes Lehrbuch
der
Arbeits- und Gewerbehygiene
von
Prof. Dr. K. B. Lehmann
Geh. Hofrat, Vorstand des hygien. Instituts Würzburg

Mit 89 Abbildungen

Preis: Geheftet M. 36.—, gebunden M. 54.—

Das Buch gehört in die Geschäftsbibliothek eines jeden industriellen Betriebes, um den verantwortlichen Leitern, Betriebsräten usw. bei der Überwachung der hygienischen Gefahren, welche die einzelnen Berufsarten mit sich bringen, als zuverlässiger Führer und als Fundgrube der Belehrung zu dienen hinsichtlich der Anforderungen, die an das Fabrikgebäude, an die Wohnung, Ernährung und Kleidung der Arbeiter gestellt werden.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. — Zusammenfassende Bearbeitungen.)

Seite

Atomgewichte: Über eine neue periodische Beziehung zwischen den — der chemischen Elemente. II. Das Gesetz der gespiegelten Reste, v. K. Fehrle . . 382
Chemische Elemente: Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der —, II. Das Gesetz der gespiegelten Reste, v. K. Fehrle . . 382
Elektronenrelais: Über die Ursache der Wirksamkeit der Strahlungsdetektoren und des —, v. E. F. W. Rasch 381
Elster, J. †, **u. H. Geitel**, Über eine scheinbare photoelektrische Nachwirkung am Kalium und über den Einfluß der Entgasung auf den Photoeffekt an Metallen 361
Fehrle, K., Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente. II. Das Gesetz der gespiegelten Reste . . 382
Gehrcke, E., Der Zusammenhang der optischen und der Röntgenspektren 378
Geitel, H., u. J. Elster †, Über eine scheinbare photoelektrische Nachwirkung am Kalium und über den Einfluß der Entgasung auf den Photoeffekt an Metallen 361
Kalium: Über eine scheinbare photoelektrische Nachwirkung am — und über den Einfluß der Entgasung auf den Photoeffekt an Metallen, v. J. Elster † u. H. Geitel 361
Kienle, H., Neue Sterne. (Z. B.) Fortsetzung. . . 385
Kristalle: Über unipolare Leitung an —, v. F. Streintz. Dritte Mitteilung 367
Metalle: Über eine scheinbare photoelektrische Nachwirkung am Kalium und über den Einfluß der Entgasung auf den Photoeffekt an —, v. J. Elster † u. H. Geitel 361
Optische Spektren: Der Zusammenhang der — und der Röntgenspektren, v. E. Gehrcke 378
Rasch, E. F. W., Über die Ursache der Wirksamkeit der Strahlungsdetektoren und des Elektronenrelais 381
Röntgenspektren: Der Zusammenhang der optischen und der Röntgenspektren, v. E. Gehrcke . . . 378
Spektrum: Über neue Apparate und Messungen im langwelligen —, v. H. Witt. Vorläufige Mitteilung 374
Sterne: Neue —, v. H. Kienle. (Z. B.). Fortsetzung. 385
Strahlungsdetektoren: Über die Ursache der Wirksamkeit der — und des Elektronenrelais, v. E. F. W. Rasch 381
Streintz, F., Über unipolare Leitung an Kristallen. Dritte Mitteilung 367
Witt, H., Über neue Apparate und Messungen im langwelligen Spektrum. Vorläufige Mitteilung . . . 374

Richard Müller-Url, Braunschweig
Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe.** — **Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat.** — **Apparate für flüssige Luft.** — **Verflüssigte Gase in Röhren.** — **Projektions- und Extrem-Thermometer.** — **Elektroskope** und **Trockensäulen.** — **Vakuumröhren** nach Braun, Crookes Geißler, Pulnj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme.** — **Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Gegen Höchstgebot
sind zu verkaufen
Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Band 1—10, elegant gebunden, Band 11 bis 16 geheftet.
Physikalische Zeitschrift. Band 1 bis 14II elegant gebunden, Band 15—20 geheftet. Angebote unter **S. H. 567** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch
Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16
Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.
Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.
Preislisten kostenlos.